EPFL - Semestre de Printemps 2020-2021	Jérôme Scherer
Topologie	**Examen final**
MATHÉMATIQUES	le 25 juin 2021
Durée : 180 minutes	Nombre de points : 80

Nom		Prénom	
Signature		Sciper	

Nous demandons à chaque exercice des justifications et des explications claires et précises. Il est permis de citer un résultat du cours ou l'un des exercices théoriques des séries à condition que le sujet du problème d'examen ne soit pas justement le contenu de ce résultat ou exercice, et que l'énoncé du résultat soit donné explicitement et complètement.
Les pages 15 et 16 sont à disposition pour terminer un exercice si nécessaire, mais en général la place prévue devrait suffire.

Espace réservé pour la correction.

Ex. 1 (7 pts)		Ex. 2 (13 pts)		Ex. 3 (10 pts)	
Ex. 4 (15 pts)		Ex. 5 (8 pts)		Ex. 6 (12 pts)	
Ex. 7 (15 pts)					
Total (80 pts)		**Note**			

Question 1, théorie. (7 points) Soit X un espace connexe par arcs dont on choisit deux points distincts x et y. Montrer que les groupes fondamentaux $\pi_1(X; x)$ et $\pi_1(X; y)$ sont isomorphes. On demande de vérifier que les applications utilisées sont bien définies.

Question 2, quelques quotients. (13 points)

(a) (3 pts) Le générateur g du groupe C_2 agit sur la sphère S^2, la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$, par $(x; y; z) \cdot g = (x; y; -z)$. Montrer que le quotient S^2/C_2 est homéomorphe à un disque fermé. On demande des formules explicites pour les application utilisées.

(b) (5 pts) Le générateur g du groupe C_2 agit sur le tore $E = S^1 \times S^1$ par $(x; y) \cdot g = (y; x)$. Montrer que le quotient E/C_2 est homéomorphe à un ruban de Moebius. On admet dans cet exercice qu'un disque fermé est homéomorphe à une surface polygonale fermée convexe, les formules explicites de ces homéomorphismes ne sont pas demandées, les illustrations doivent être accompagnées d'explications.

(c) (5 pts) On inclut $\mathbb{R}^3 \setminus \{0; 0; 0)\} \subset \mathbb{R}^5 \setminus \{0; 0; 0; 0; 0)\}$ via $(x; y; z) \mapsto (x; y; z; 0; 0)$. On considère $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^4$ l'application induite sur les quotients par l'application antipodale. Identifier le quotient $\mathbb{R}P^4/\mathbb{R}P^2$ en donnant une structure cellulaire avec les applications d'attachement.

Question 3, un pushout de groupes. (10 points) Soit $f\colon F(a,b) \to F(x,y)$ l'homomorphisme de groupes (entre deux groupes libres à deux générateurs) défini par $f(a) = xy^2x^{-1}y^{-2}$ et $f(b) = x^4y^{-3}$. On cherche à identifier le pushout G du diagramme $\{1\} \leftarrow F(a,b) \xrightarrow{f} F(x,y)$.

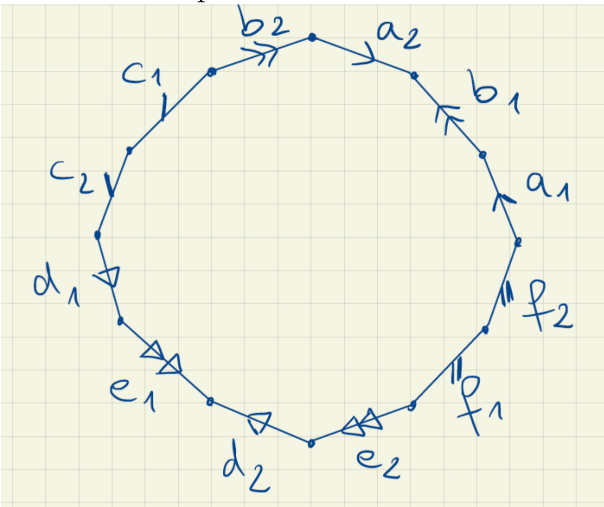
(a) (1 pt) Donner une présentation du groupe G.

(b) (2 pts) Montrer que G est abélien.

(c) (3 pts) Montrer que l'image de $x^{-1}y$ dans le pushout G est un générateur de G.

(d) (4 pts) Identifier G en donnant en particulier les homomorphismes qui permettent de compléter le diagramme de pushout ci-dessus en un carré commutatif.

Question 4, une surface. (15 points) On donne la présentation polygonale suivante qui définit une surface S par identification des douze côtés deux à deux dans le sens indiqué par les flèches :



(a) (4 pts) Effectuer des découpages et des recollements pour trouver la présentation polygonale standard de cette surface (les deux carrés se suivent). On ne demande pas des homéomorphismes explicites, mais des explications qui accompagnent les illustrations.

(b) (4 pts) Donner une présentation du groupe fondamental de S directement à partir de la présentation polygonale obtenue en (a) en expliquant comment on obtient les relations.

(c) (2 pts) Identifier cette surface sous sa forme donnée dans le Théorème de classification. Aucun découpage n'est demandé, on pourra se baser sur la théorie vue en cours.

(d) (1 pt) Donner le groupe fondamental de S sous sa forme correspondant à la présentation polygonale du point (c).

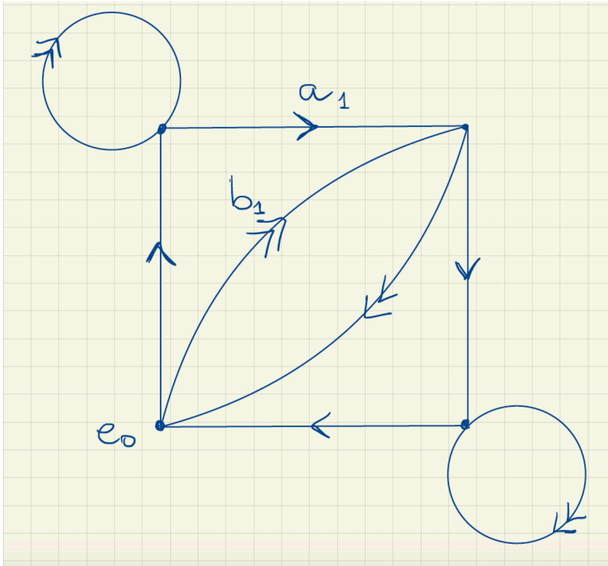
(e) (4 pts) Identifier l'abélianisé A de $\pi_1 S$. On demande seulement de donner un groupe abélien A de type fini et de construire un homomorphisme surjectif $\pi_1 S \to A$. L'injectivité de cet homomorphisme n'est pas demandée.

Question 5, deux homotopies. (8 points) Dans cet exercice on demande des formules explicites pour les applications et les homotopies.

(a) (3 pts) Montrer que $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\}$ a le type d'homotopie de la sphère S^2.

(b) (5 pts) Soit $x = (1;1) \in S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$, le point de base du tore. On appelle α et β les lacets équateur et méridien respectivement qui engendrent $\pi_1(S^1 \times S^1; x)$.
On considère le lacet $\omega\colon I \to S^1 \times S^1$ défini par $\omega(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i t})$ pour tout $0 \leq t \leq 1$. Montrer que ω et $\alpha \star \beta$ sont homotopes dans le sens pointé.

Question 6, un revêtement. (12 points) Considérons l'espace Y obtenu à partir d'un carré en attachant deux cercles et deux arêtes comme ceci :



On appelle $q\colon Y \to Y/\mathcal{S}$ l'application quotient où $\mathcal{S}$ est la relation d'équivalence définie en identifiant les quatre sommets du carré entre eux, les quatre côtés du carré entre eux et les deux cercles entre eux et avec les deux arêtes diagonales, comme indiqué par le sens des flèches qui décorent les arêtes de ce graphe. On appelle a le lacet de $Y/\mathcal{S}$ donné par l'image du côté a_1 du carré et b celui donné par l'image de l'arête diagonale b_1.

(a) (4 pts) Identifier le type d'homotopie de Y et calculer son groupe fondamental $G = \pi_1(Y; e_0)$ si e_0 est le sommet du carré indiqué sur l'illustration.

(b) (5 pts) Calculer l'image du groupe fondamental $H = q_*(G)$ et son indice dans $\pi_1(Y/\mathcal{S}; q(e_0))$.

(c) (3 pts) Est-ce que H est un quotient de G ? Est-ce un sous-groupe normal de $\pi_1(Y/\mathcal{S}; q(e_0))$? Justifier.

Question 7, un quotient de $\mathbb{R}^2$. (15 points) Soit $\sim$ la relation d'équivalence définie sur $\mathbb{R}^2$ par $(x;y) \sim (x+2a-2b; y+2a+4b)$ pour tous $a,b \in \mathbb{Z}$ et tous $x,y \in \mathbb{R}$. On appelle $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ l'application quotient. On fait agir $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par translations $(x;y)\cdot(a;b) = (x+a; y+b)$ pour tout $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ et on appelle $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ l'application quotient.

(a) (3 pts) Montrer que q est une application (continue et) ouverte.

(b) (2 pts) Montrer qu'il existe une unique application $f\colon \mathbb{R}^2/\sim \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ telle que $f \circ q = p$.

(c) (5 pts) Montrer que f est un revêtement galoisien et calculer le nombre de feuillets.

(d) (5 pts) Identifier le groupe des automorphismes de f (en indiquant son ordre, sa structure, ses générateurs, une présentation).