Ens: Jérôme Scherer
Topologie - (n/a)
13 août 2020
Durée : 180 minutes

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

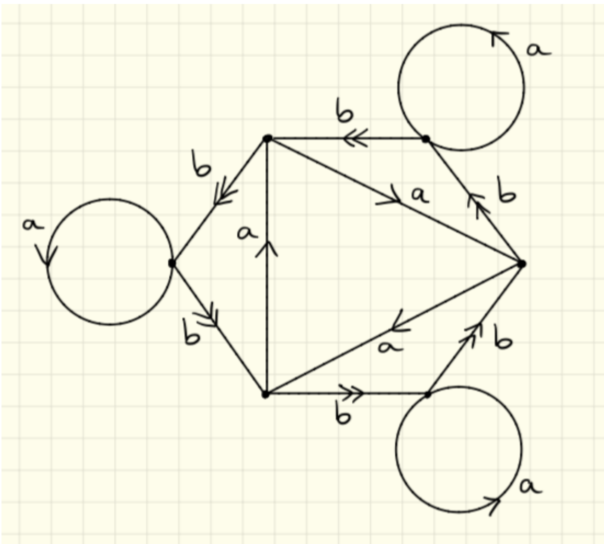
Question 1 : On considère la présentation polygonale (sur un carré) associée au mot $aa^{-1}bb^{-1}$. L'espace quotient ainsi défini est homotope à

- ☐ une sphère S^2
- ☐ aucune surface
- ☐ un tore T^2
- ☐ une somme connexe de deux plans projectifs réels $\mathbb{R}P^2$

Question 2 : Soit $p\colon E \to X$ un revêtement, $e \in E$ et $x = p(e)$. Laquelle des affirmations suivantes n'est pas équivalente aux trois autres?

- ☐ $\pi_1(X; x) \cong \mathrm{Aut}(p)$
- ☐ l'image de $\pi_1(E; e)$ par p_* est normale dans $\pi_1(X; x)$
- ☐ l'action de $\mathrm{Aut}(p)$ est transitive sur la fibre $p^{-1}(x)$
- ☐ p est galoisien

Question 3 : On considère le graphe suivant qui définit un revêtement $p\colon E \to S^1 \vee S^1$.



Le groupe des automorphismes de ce revêtement est isomorphe:

- ☐ au groupe cyclique d'ordre 6
- ☐ au groupe dihédral d'ordre 6
- ☐ au groupe cyclique d'ordre 3
- ☐ au groupe cyclique d'ordre 2

Question 4 : Avec les mêmes notations que pour la question précédente. On choisit un sommet e du graphe comme point de base de E et on appelle $H = p_*(\pi_1(E; e))$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est **fausse**?

- ☐ H est un sous-groupe d'indice 6 dans $\pi_1(S^1 \vee S^1)$
- ☐ le groupe fondamental de E est un groupe libre à 7 générateurs
- ☐ H est normal dans $\pi_1(S^1 \vee S^1)$
- ☐ le groupe fondamental de E est isomorphe à un sous-groupe du groupe libre à deux générateurs

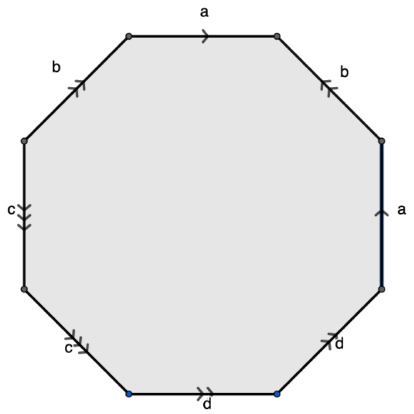
Question 5 : Le groupe additif $\mathbb{Z}^2$ agit sur $\mathbb{C}$ par $z * (a, b) = z + a + bi$ pour tous $z \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{Z}$.
Alors

- ☐ Le quotient $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ pour cette action $*$ est compact, mais il existe des actions de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{C}$ telles que le quotient n'est pas compact
- ☐ Le quotient $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ pour cette action $*$ n'est pas compact, mais il existe des actions de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{C}$ telles que le quotient est compact
- ☐ Le quotient $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ est compact pour toute action de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{C}$
- ☐ Le quotient $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ n'est compact pour aucune action de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{C}$

Question 6 : On considère les applications suivantes $S^1 \to S^1$, où S^1 est le cercle unité de centre $(0; 0)$ dans $\mathbb{R}^2$: la rotation R d'angle $\pi/3$ et la réflexion S d'axe vertical $x = 0$.
Alors

- ☐ R est homotope à l'identité Id_{S^1} par une homotopie non pointée (et pas par une homotopie pointée), mais S n'est pas homotope à l'identité
- ☐ R est homotope à l'identité Id_{S^1} par une homotopie pointée, mais S n'est pas homotope à l'identité
- ☐ S est homotope à l'identité Id_{S^1} par une homotopie pointée, mais R n'est pas homotope à l'identité
- ☐ S est homotope à l'identité Id_{S^1} par une homotopie non pointée (et pas par une homotopie pointée), mais R n'est pas homotope à l'identité

Question 7 : Soit S le quotient de l'octogone (avec son intérieur) dont on identifie les arêtes du bord deux à deux selon la règle indiquée sur l'illustration suivante:



Alors S est homéomorphe à

- ☐ la somme connexe de deux tores
- ☐ la somme connexe de trois plans projectifs réels
- ☐ la somme connexe d'un plan projectif réel et d'un tore
- ☐ la somme connexe d'un tore et d'une bouteille de Klein

Question 8 : Soit $q\colon X \to Y$ une application quotient.
Alors q est une application ouverte

- ☐ toujours
- ☐ si et seulement si les préimages de q sont des ensembles finis
- ☐ si X est une surface, mais pas en général
- ☐ s'il existe un groupe G agissant sur X tel que $Y = X/G$, mais pas en général

Question 9 : Soient X et Y des espaces et $p\colon X \times Y \to X$ la projection sur la première composante.
Alors

- ☐ p est une application quotient et un revêtement si X est discret, mais pas en général
- ☐ p est toujours une application quotient, mais c'est un revêtement si et seulement si Y est discret
- ☐ p est toujours un revêtement, mais c'est une application quotient si et seulement si Y est compact
- ☐ p est toujours une application quotient et un revêtement

Deuxième partie, rédaction

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 10: Théorie: définitions. *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

Soit X un espace, $p\colon E \to X$ un revêtement et $x_0 \in X$.

1. Sous quelles hypothèses le revêtement universel de X existe-t-il? (3 pt)
2. Définir l'action de monodromie sur la fibre $p^{-1}(x_0)$. (4 pts)

Question 11: Théorie: démonstrations. *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 *Réservé au correcteur*

Soient $n \in \mathbb{N}$, D^n la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ et S^{n-1} la sphère unité. Soit $f\colon S^{n-1} \to X$ une application continue.

1. Montrer que le cône sur S^{n-1} est homéomorphe à D^n. On demande une formule explicite. (4 points)
2. Montrer que f est homotope à une application constante si et seulement s'il existe une application continue $F\colon D^n \to X$ telle que $F(s) = f(s)$ pour tout $s \in S^{n-1}$. (6 pt)

Question 12: Le tore privé de deux points. *Cette question est notée sur 24 points.*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
Réservé au correcteur

Soit T un tore. On demande d'identifier le type d'homotopie du tore T privé de deux points. Dans cet exercice on note $I = [-1, 1]$.

1. Montrer que le bord du carré $\partial(I \times I)$ est un rétracte de déformation du carré privé d'un point. On demande une formule explicite pour la rétraction et une formule explicite pour l'homotopie. (8 pt)
2. Identifier le type d'homotopie du tore privé d'un point. (4 pts)
3. Expliquer (sans donner ni formule, ni homotopie explicitement) comment déterminer le type d'homotopie du tore T privé de deux points. On demande des justifications basées sur la théorie. (10 pt)
4. Calculer le groupe fondamental du tore privé de deux points. (2 points)

c

Question 13: Une somme connexe de surfaces. *Cette question est notée sur 25 points.*

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	*Réservé au correcteur*
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

Montrer que la somme connexe d'une bouteille de Klein K et d'un plan projectif réel est homéomorphe à une somme connexe d'un tore et d'un plan projectif. On ne demande pas de formules explicites pour les homéomorphismes, mais des explications qui amènent au modèle utilisé de présentation polygonale et des dessins soignés indiquant quels découpages on fait (Indication: deux découpages suffisent).

1. Dessiner une présentation polygonale de K, du tore et du plan projectif réel. (6 pt)
2. Expliquer comment on obtient une présentation polygonale de la somme connexe d'une bouteille de Klein et d'un plan projectif réel. On demande aussi de faire les dessins qui accompagnent les explications. (5 pts)
3. Expliquer et dessiner les opérations de découpage et recollement pour obtenir une somme connexe d'un tore et d'un plan projectif. (9 pt)
4. Donner une présentation du groupe fondamental de l'espace $K\#\mathbb{R}P^2$. (5 points)

Question 14: Attachement de cellule. *Cette question est notée sur 8 points.*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 *Réservé au correcteur*

Soit $\mathbb{R}P^3$ le quotient de la sphère S^3 par la relation antipodale.

1. Montrer que $\mathbb{R}P^3$ s'obtient de $\mathbb{R}P^2$ en attachant une cellule de dimension 3. (5 points)
2. Calculer le groupe fondamental de $\mathbb{R}P^3$ connaissant celui de $\mathbb{R}P^2$. (3 points)