EPFL - Semestre de Printemps 2023-2024	Jérôme Scherer
Topologie MATH-225	**Examen final**
Mathématiques	le 17 juin 2024
Durée : 180 minutes	Nombre de points : 62

Nom		Prénom	
Signature		Sciper	

Nous demandons à chaque exercice des justifications et des explications claires et précises. Il est permis de citer un résultat du cours ou l'un des exercices théoriques des séries à condition que le sujet du problème d'examen ne soit pas justement le contenu de ce résultat ou exercice, et que l'énoncé du résultat soit donné explicitement et complètement.
Les pages 15 et 16 sont à disposition pour terminer un exercice si nécessaire, mais en général la place prévue devrait suffire.

Espace réservé pour la correction.

Ex. 1 (8 pts)		Ex. 2 (9 pts)		Ex. 3 (9 pts)	
Ex. 4 (8 pts)		Ex. 5 (12 pts)		Ex. 6 (16 pts)	
Total (62 pts)		**Note**			

Question 1. Un collapse du plan. (8 points) On considère $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ et les sous-espaces $\partial I^2 \subset I^2$, où $I = [0; 1]$ est l'intervalle unité. On s'intéresse aux quotients $A = I^2/\partial I^2$ et $B = \mathbb{R}^2/Y$ obtenus en collapsant les sous-espaces respectifs.

(a) (3 points) Etablir un homéomorphisme $A \approx S^2$. On ne demande pas de formules explicites, mais des explications claires et précises qui expliquent comment une application $A \to S^2$ est construite et pourquoi c'est un homéomorphisme.

(b) (1 points) Montrer que l'inclusion $I^2 \subset \mathbb{R}^2$ induit une application $A \to B$. Est-ce un homéomorphisme ? Expliquer pourquoi.

(c) (4 points) Construire un homéomorphisme entre B et un wedge de sphères (et prouver que c'est un homéomorphisme). Combien de sphères y a-t-il dans ce wedge ?

Question 2, Théorie des groupes. (9 points) Soient $\alpha, \beta \colon G \to H$ deux homomorphismes de groupes. On dit qu'un homomorphisme $\lambda \colon H \to L$ *coégalise* α et β si $\lambda \circ \alpha = \lambda \circ \beta$. On cherche dans cet exercice un groupe K et un homomorphisme $\kappa \colon H \to K$ qui coégalise α et β et tel que pour tout autre $\lambda \colon H \to L$ qui coégalise α et β il existe un unique homomorphisme $u \colon K \to L$ tel que $\lambda = u \circ \kappa$.

(a) (1 point) En représentant les deux homomorphismes α et β comme deux flèches parallèles entre G et H, représenter la propriété universelle de κ sous forme de diagramme.

(b) (2 points) Montrer que si K et κ existent, alors la propriété universelle détermine K à isomorphisme près. Puisque ce K est alors bien défini, on l'appelle le *coégalisateur* de α et β.

(c) (2 points) Construction de K. On définit K comme le quotient du groupe H par le sous-groupe normal engendré par les éléments $\alpha(g)\beta(g)^{-1}$ pour tous les $g \in G$. Définir κ et vérifier la propriété universelle.

(d) (1 point) Si G et H sont donnés par des présentations de groupes $G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_k \rangle$ et $H = \langle y_1, \ldots, y_m \mid s_1, \ldots, s_\ell \rangle$, donner une présentation de K.

(e) (1 point) Si G et H sont abéliens, montrer que $K \cong H/Im(\alpha - \beta)$.

(f) (2 points) Calculer et reconnaître le coégalisateur des homomorphismes $F(x) \to F(a, b)$ qui envoient x sur a et sur bab^{-1} respectivement. Même question avec $\alpha(x) = a$ et $\beta(x) = b$.

Question 3. Propriété d'extension. (9 points) Soit T le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ obtenu par rotation du cercle de centre $(0;2;0)$ et de rayon 1 autour de l'axe vertical Oz. On considère deux inclusions $S^1 \hookrightarrow T$. La première i est celle du cercle méridien décrit ci-dessus, la seconde j est celle du cercle parallèle de centre $(0;0;0)$ et de rayon 1 se trouvant dans le plan horizontal Oxy.

(a) (2 points) Les deux inclusions i et j définissent une application $\tilde{k}\colon S^1 \coprod S^1 \to T$. Définir formellement cette application et expliquer pourquoi elle induit une application *pointée* et injective $k\colon S^1 \vee S^1 \to T$.

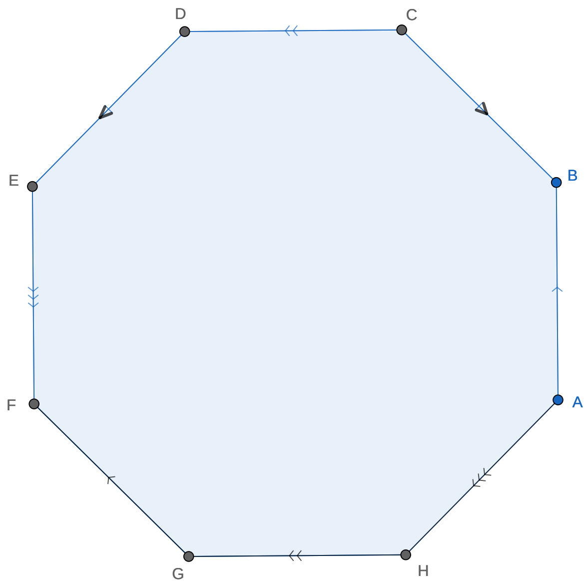
(b) (2 points) Exprimer T comme un espace obtenu de $S^1 \vee S^1$ par attachement d'une 2-cellule en donnant l'application d'attachement a (des explications *précises* suffisent, aucune formule n'est demandée).

(c) (3 points) Soit $f\colon S^1 \vee S^1 \to X$ une application. On cherche à comprendre quand il existe une application $g\colon T \to X$ tel que $g \circ k = f$. Représenter ce problème d'extension sous forme de diagramme commutatif et montrer ensuite que l'existence de g est équivalente à l'existence d'une certaine homotopie.

(d) (1 point) Montrer que l'extension g existe si et seulement si la classe d'homotopie du lacet $f \circ a$ dans $\pi_1 X$ est triviale, pour l'application a du point (b).

(e) (1 point) Soit X un espace dont le groupe fondamental $\pi_1 X$ est abélien. Montrer que toute application f admet une extension g (avec les mêmes notations qu'au point (c)).

Question 4. Une surface. (8 points) On donne la présentation polygonale suivante qui définit une surface S par identification des huit côtés d'un octogone O, deux à deux dans le sens indiqué par les flèches (par exemple le côté CB est identifié au côté DE).



(a) (1 pt) On considère le lacet de O basé en A parcourant le bord de l'octogone dans le sens trigonométrique. Expliquer pourquoi ce lacet est homotope au lacet constant c_A.

(b) (2 pts) Déduire du point (a) une présentation du groupe fondamental G de S sous sa forme correspondant à la présentation polygonale ci-dessus.

(c) (3 pts) Effectuer des découpages et des recollements pour identifier cette surface avec la somme connexe de plan(s) projectif(s) et de tore(s). Un premier découpage pourra par exemple être fait entre D et H. On ne demande pas des homéomorphismes explicites, mais des explications qui accompagnent les illustrations.

(d) (2 pts) Identifier cette surface sous sa forme "standard" donnée dans le Théorème de classification et donner le groupe fondamental G de S sous sa forme standard.

Question 5. Une application du Théorème de Seifert-van Kampen. (12 points) Soit $\mathbb{R}P^2$ le quotient de la sphère S^2 par la relation antipodale $x \sim \pm x$.

(a) (2 points) Décrire des ouverts saturés $A', B' \subset S^2$ dont les images $A, B \subset \mathbb{R}P^2$ vérifient les conditions du Théorème de Seifert-van Kampen. Choisir un point de base commun x'.

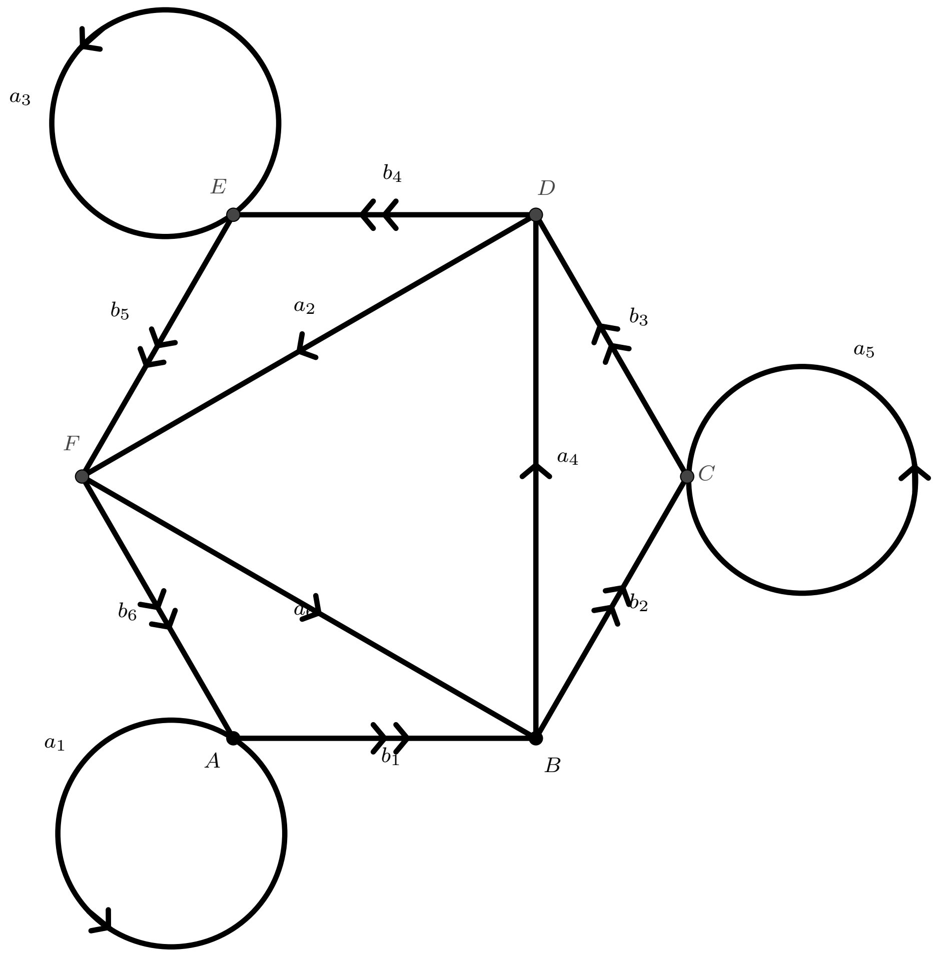
(b) (3 points) Décrire dans A', B' et $C' = A' \cap B'$ des chemins dont les images dans le quotient engendrent les groupes fondamentaux de A, B et $C = A \cap B$ pour le point de base x, image de x' dans $\mathbb{R}P^2$.

(c) (3 points) Identifier les groupes fondamentaux de A, B et C et les deux homomorphismes induits par les inclusions.

(d) (2 points) Calculer le groupe fondamental de $\mathbb{R}P^2$.

(e) (2 points) Faire le même calcul à l'aide la théorie des revêtements.

Question 6. Un revêtement du wedge de deux cercles. (16 points) Considérons l'espace E ci-dessous, obtenu en attachant aux six points A, B, C, D, E et F les six 1-cellules b_i et les six 1-cellules a_i pour $1 \leq i \leq 6$. Soit A son point de base.



(a) (4 points) Montrer que E est homotope à un wedge d'un certain nombre de cercles, identifier ce nombre k et décrire pour chacun un lacet dont la classe d'homotopie est l'un des k générateurs de $\pi_1 E$. On donnera ces lacets comme concaténation de chemins $a_i, b_i, \bar{a}_i$ ou $\bar{b}_i$ où les barres font référence à l'orientation indiquée par les flèches qui décorent les 1-cellules.

(b) (3 points) Montrer que le groupe cyclique C_3 agit sur E en permutant les sommets et les 1-cellules. Expliquer pourquoi cette action définit un revêtement $p\colon E \to X$ et décrire X.

(c) (2 points) Montrer que X forme un revêtement du wedge de deux cercles et que la composition $q\colon E \xrightarrow{p} X \xrightarrow{r} S^1_a \vee S^1_b$ est un revêtement.

(d) (2 points) Parmi les revêtements p, q et r, lesquels sont galoisiens ? Justifier !

(e) (2 points) Calculer l'image par q_* du groupe fondamental $\pi_1 E$ (pour le point de base A) en donnant les images des générateurs du point (a) comme éléments de $F(a, b)$.

(f) (3 points) Parmi les homomorphismes $\pi_1 E \xrightarrow{p_*} \pi_1 X$, $\pi_1 X \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1_a \vee S^1_b)$ et la composition $r_* \circ p_*$, lesquels sont injectifs et lesquels ont pour image un sous-groupe normal ? Justifier toutes vos réponses.