EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Topologie II **Corrigé 9**

Exercice 1. Un espace mal pointé. Montrer qu'avec sa topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^2$ le peigne du topologue $P = (0 \times I) \cup (I \times 0) \cup (\{1/n \mid n \geq 1\} \times I)$ n'est pas bien pointé en $(0, 1)$.

Solution 1. Soit $V \subset P$ un voisinage de $x_0 = (0, 1)$ et $h : V \times I \to V$ une homotopie pointée entre l'identité et la fonction constante $c : v \mapsto x_0$. Alors puisque h est continue et que le peigne est compact (et donc le produit avec I aussi), h est uniformément continue (h est définie sur un ouvert mais comme le domaine et le but sont contenus dans des compacts, h s'étend par continuité à l'adhérence de V qui est compacte) si bien qu'il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in P$ vérifiant $\|x - x_0\| < \delta$ on a

$$\|h(x, t) - h(x_0, t)\| < \tfrac{1}{2}$$

pour tout $t \in I$. Puisque h est une homotopie pointée, on a $h(x_0, t) = x_0$ pour tout t et donc $\|h(x, t) - x_0\| < \frac{1}{2}$. Par ailleurs, l'application $h(x, \cdot) : I \to V$ est un chemin reliant x au point x_0 dans V. On utilise le fait suivant sur les chemins dans P :

Si $n > 0$ et $t, t' \in I$ et $\gamma : I \to P$ avec $\gamma(0) = (0, t)$ et $\gamma(1) = (\frac{1}{n}, t')$ un chemin reliant $(0, t)$ et $(\frac{1}{n}, t')$, alors il existe $t_0 \in I$ tel que $\gamma(t_0) = (0, 0)$. En effet, l'espace $P \setminus (0, 0)$ n'est pas connexe par arcs. ses composantes connexes par arcs sont $0 \times (I \setminus 0)$ et $P \setminus (0 \times I)$.

Soit $n > 0$ tel que $\frac{1}{n} < \delta$ et soit $x = (\frac{1}{n}, 1)$. On a donc l'existence de $t_0 \in I$ tel que $h(x, t_0) = (0, 0)$. Ainsi

$$\tfrac{1}{2} > \|h(x, t_0) - x_0\| = \|(0, 0) - (1, 1)\| = 1$$

C'est absurde, donc P n'est pas bien pointé en $(0, 1)$. Le raisonnement s'applique aussi si on choisit $(0, t)$ pour tout $0 < t \leq 1$ à la place de $(0, 1)$. En revanche, P est bien pointé en tout autre point.

Exercice 2. Soit I un ensemble quelconque et $(A_i, a_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces bien pointés. Montrer que

$$\pi_1(\bigvee_{i \in I}(A_i)) \cong \mathop{*}_{i \in I} \pi_1(A_i)$$

Solution 2.
Analogue à la preuve de la proposition 3.1 du polycopié.

Exercice 3. Attachement de $1-$cellules. Soit (X, x_0) un espace topologique et $Y = X \cup_f e^1$ où $e_1 = D^1 = I$ et $f \colon S^0 \to X$. On veut calculer $\pi_1(Y)$ en fonction des $\pi_1(X, x)$ pour x dans les différentes composantes connexes de X.

1. Supposons que X soit connexe par arcs et bien pointé. Montrer que $\pi_1(Y) = \pi_1(X) * \mathbb{Z}$.
2. Notons Z_1 la composantes connexe de x_0 dans X et Z_2 celle de $f(-1)$. Calculer $\pi_1(Y)$ en fonction de $\pi_1(Z_1)$ et $\pi_1(Z_2)$.

Solution 3.

1. Notons $x = f(-1)$. On attache une copie de $I = [-1,1]$ à X en identifiant les extrémités à x et x_0. Comme X est connexe par arcs, il existe un chemin γ de x à x_0. On peut utiliser ce chemin γ pour construire une équivalence d'homotopie entre Y et $Y' = X \cup_{f'} e^1$ où $f(-1) = f(1) = x_0$. Désormais, on a attaché à X un lacet attaché à x_0. Soit V un voisinage contractile de x_0 dans Y' (on utilise que X et I sont bien pointé). On utilise Van Kampen avec $i(e^1) \cup V$ et $i(X) \cup V$ pour conclure. On a noté les inclusions standards par i.
2. $\pi_1(Y) = \pi_1(Z_1) * \pi_1(Z_2)$. L'idée de la démonstration est qu'on peut construire une équivalence d'homotopie entre Z_1 et $Z_1' = Z_1 \cup_{x_0} I$ où l'on attache $I = [-1,1]$ à Z_1 via l'identification $1 \sim x_0$. On attache l'intervalle seulement par une extrémité à Z_1. On utilise que l'intervalle est contractile.

   Ensuite, on applique Van Kampen en utilisant comme ouverts $A = Z_1 \cup (-1,1]$ et $B = Z_2 \cup [-1,1)$. $A \simeq Z_1$ et $B \simeq Z_2$ et $A \cap B = (0,1) \simeq pt$.

Exercice 4. Espaces projectifs

1. Utiliser la structure cellulaire vue précédement pour calculer $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$.
2. De même pour $\pi_1(\mathbb{CP}^n)$.

Solution 4.

1. On utilise la structure cellulaire de $\mathbb{RP}^n$ avec une cellule de dimension k pour chaque $0 \leq k \leq n$. On utilise le corollaire 4.4 du cours.
   — Pour $n = 1$, par la partie (c) : $\pi_1(\mathbb{RP}^1) = \mathbb{Z}$.
   — Pour $n = 2$: par la partie (b), comme l'application d'attachement antipodale est donnée par $[x] * [x]$ où $[x]$ est générateur de $\pi_1(\mathbb{RP}^1)$, on a $\pi_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
   — Pour $n \geq 2$, par (a), on a $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. On utilise la structure cellulaire suivante de $\mathbb{CP}^n$:

$$\mathbb{CP}^n = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \cdots \cup e^{2n}$$

   Comme on attache la $2-$cellule à une $0-$cellule, l'application d'attachement est le lacet trivial, donc par (a) et (b) du corollaire 4.4, $\pi_1(\mathbb{CP}^n) = 0 \quad$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 5. Bouteille de Klein Soit K la bouteille de Klein, vue comme quotient de $I \times I$ en identifiant les bords verticaux orientés dans le même sens et les bords horizontaux orientés dans un sens opposé.

1. Rappeler l'application d'attachement $f\colon\ S^1 \to S^1 \vee S^1$ qui permet de voir K comme $S^1 \vee S^1$ avec une $2-$cellule attachée.
2. Donner une présentation de $\pi_1(K)$.

Solution 5.

— L'application d'attachement est donnée par $a * b * a^{-1} * b$, si a est le lacet correspondant au bord horizontal et b au bord vertical du carré.
— Par le corollaire 4.4 (b), on a $\pi_1(K) = \langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$ puisque la classe d'homotopie de $a * b * a^{-1} * b$ dans $\pi_1(S^1 \vee S^1 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ est $aba^{-1}b$.

Exercice 6. Calculer les groupes fondamentaux de :

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0);(1;0);\ldots;(n;0)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $\mathbb{R}^3 \setminus (Ox \cup Oy \cup Oz)$
3. $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ où S^1 est le cercle unité dans le plan Oxy.

Solution 6.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0);(1;0);\ldots;(n;0)\}$. Pour $n = 0$, on a déjà vu que $\mathbb{R}^2 \setminus (0;0)$ se rétracte par déformation sur le cercle $S^1 \subset X_0$ et donc $\pi_1 X_0 \cong \mathbb{Z}$. On montre par récurrence sur n que $\pi_1(X_n) \cong F_{n+1}$ est le groupe libre à $n+1$ générateurs. Le cas $n = 0$ est vérifié.
   Si on suppose que $\pi_1(X_n) \cong F_{n+1}$, on considère les deux ouverts $U, V \subset X_{n+1}$ définis par
   $$U = \{(x;y) \in X_{n+1} \ ; \ x < \tfrac{2}{3}\} \quad \text{et} \quad V = \{(x;y) \in X_{n+1} \ ; \ x > \tfrac{1}{3}\}$$
   Alors $U \approx X_0$ et $V \approx X_n$. On a de plus $U \cup V = X_{n+1}$ et $U \cap V = \left]\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right[\times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^2$ est contractile. Ainsi, pour tout choix de point base $z \in U \cap V$ le théorème de Van Kampen et l'hypothèse de récurrence donnent
   $$\begin{aligned} \pi_1(X_{n+1}, z) &\cong \pi_1(U, z) * \pi_1(V, z) \\ &\cong \pi_1(X_0) * \pi_1(X_n) \\ &\cong \mathbb{Z} \star F_{n+1} \\ &\cong F_{n+2} \end{aligned}$$

2. On pose $X = \mathbb{R}^3 \setminus (Ox \cup Oy \cup Oz)$. On considère le sous-espace $Y = \{x \in X \ ; \ \|x\| = 1\}$ constitué des vecteurs de X de norme 1. Alors $Y = S^2 \setminus \{\pm e_x, \pm e_y, \pm e_z\}$ est la sphère privée de 6 points. Or puisque $S^2 \setminus \{p\} \approx \mathbb{R}^2$ pour tout $p \in S^2$, on a
   $$Y \approx S^2 \setminus \{p_0, \cdots, p_5\} \approx \mathbb{R}^2 \setminus \{p_0, \cdots, p_4\} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0), \cdots, (4;0)\} = X_4$$
   Par l'exercice précédent, on conclut que $\pi_1 Y \cong \pi_1 X_4 \cong F_5$. Pour $0 \leq t \leq 1$, la formule
   $$\begin{aligned} h_t : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x + t\big(\tfrac{x}{\|x\|} - x\big) \end{aligned}$$
   définit une équivalence d'homotopie de X vers Y. On a donc $X \simeq Y$ et
   $$\pi_1 X \cong \pi_1 Y \cong F_5 \ .$$

3. On pourra construire un recouvrement ouvert en enlevant d'une part le disque D de bord S^1 et en choisissant d'autre part un tore plein contenant l'intérieur $\mathring{D}$.

   On pose $X = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$. Soit $U = \mathbb{R}^3 \setminus D$ avec D le disque unité fermé dans le plan Oxy, et V le volume de révolution obtenu à partir du disque ouvert $\mathring{D}$ par rotation autour de l'axe $y = 2$, $z = 0$.
   Alors U et V sont des ouverts de X avec $U \cup V = X$ et $U \cap V$ consiste en tout le tore plein ouvert V, mais privé du disque $\mathring{D}$. Par ailleurs, V est homotope au cercle de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$(y-2)^2+z^2=4$ (l'âme du tore) et de même l'intersection $U \cap V$ se rétracte par déformation sur ce cercle privé de l'origine O.

Ainsi V a le type d'homotopie d'un cercle, $U \cap V$ est contractile, et enfin on a une équivalence $U \simeq \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \simeq S^2$. En particulier $\pi_1 V \cong \pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$, mais les groupes fondamentaux de U et de $U \cap V$ sont triviaux. Finalement, le théorème de Van Kampen permet de conclure que $\pi_1 X \cong \pi_1 U *_{\pi_1(U\cap V)} \pi_1 V \cong \mathbb{Z} *_1 1 \cong \mathbb{Z}$. Le générateur de ce groupe d'homotopie est un lacet qui forme un entrelac non-trivial avec le cercle S^1, par exemple l'âme du tore V.