EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025

Topologie II **Corrigé 8**

Exercice 1.La propriété universelle du pushout.

1. Soit X, Y, Z des espaces topologiques, et $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ deux applications continues. Montrer qu'il existe une unique application continue $f \coprod g : X \coprod Y \to Z$ qui fait commuter le diagramme
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ Y \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \coprod Y \arrow[dr] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$
où $i : X \hookrightarrow X \coprod Y$ et $j : Y \hookrightarrow X \coprod Y$ sont les inclusions canoniques.
2. Soit T et Z deux espaces topologiques, et $X, Y \subset T$ des sous-espaces *ouverts* de T. Si $f : X \to Z$ et $g : Y \to Z$ sont des applications, montrer qu'il existe une unique application $f \cup g : X \cup Y \to Z$ qui fait commuter le diagramme
$$\begin{tikzcd} X \cap Y \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\subset"'] & X \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ Y \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \cup Y \arrow[dr] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$
où $i : X \hookrightarrow X \cup Y$ et $j : Y \hookrightarrow X \cup Y$ sont les inclusions canoniques. Et si les sous-espaces ne sont pas ouverts ?
3. Soit $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$ des espaces topologiques pointés, et $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ deux applications pointées. Montrer qu'il existe une unique application pointée $f \vee g : X \vee Y \to Z$ qui fait commuter le diagramme
$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, "y_0"'] & X \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ Y \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \vee Y \arrow[dr] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$
où $i : X \hookrightarrow X \vee Y$ et $j : Y \hookrightarrow X \vee Y$ sont les inclusions canoniques.
4. Soit X, Z des espaces topologiques et $\phi : S^{n-1} \to X$, $f : X \to Z$, $g : D^n \to Z$ des applications continues. Montrer qu'il existe une unique application $f \cup_\phi g : X \cup_\phi e^n \to Z$ qui fait commuter

le diagramme

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
D^n \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \cup_\phi e^n \arrow[dr] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

où $i : X \hookrightarrow X \cup_\phi e^n$ et $j : D^n \hookrightarrow X \cup_\phi e^n$ sont les inclusions canoniques.

5. Soient G, H, K des groupes avec deux morphismes $\alpha\colon K \to G$ et $\beta\colon K \to H$. Montrer que pour tout groupe M, tel que $\psi\colon H \to M$ et $\phi\colon G \to M$ avec $\phi \circ \alpha = \psi \circ \beta$, il existe un unique homomorphisme $\omega\colon G *_K \to M$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & H \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "\psi"] & \\
G \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "\phi"'] & G *_K H \arrow[dr, "\omega"] & \\
& & M
\end{tikzcd}$$

où i et j sont les morphismes canoniques.

Solution 1.

1. Les points de $X \coprod Y$ sont de la forme $(x, 0)$ avec $x \in X$ ou $(y, 1)$ avec $y \in Y$. On pose

$$f \coprod g : \begin{cases} (x,0) & \longmapsto f(x) \\ (y,1) & \longmapsto g(y) \end{cases}$$

et on vérifie que $f \coprod g$ fait commuter le diagramme et que si $h : X \coprod Y \to Z$ est une autre telle application, alors $h = f \coprod g$.

2. On pose cette fois

$$f \cup g : z \longmapsto \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in X \\ g(z) & \text{si } z \in Y \end{cases}$$

et on vérifie que cette formule définit bien une application $X \cup Y \to Z$. Cette application est bien définie car f et g coincident sur $X \cap Y$, et elle fait commuter le diagramme ci-dessus. Elle est continue car X et Y sont ouverts, par le Pasting Lemma. L'unicité est claire également : si h est une application $X \cup Y \to Z$ faisant commuter le diagramme, alors $h(x) = f(x) = (f \cup g)(x)$ pour tout $x \in X$ et $h(y) = g(y) = (f \cup g)(y)$ pour tout $y \in Y$ et donc $h = f \cup g$.

Si on ne suppose pas que les sous-espaces X, Y sont tous deux ouverts, alors il se peut que leur union ne soit pas le pushout. Par exemple les deux hémicycles $\{e^{it} \mid 0 \leq t \leq \pi\}$ et $\{e^{it} \mid \pi \leq t < 2\pi\}$ recouvrent entièrement le cercle, mais le pushout obtenu en identifiant leur intersection constituée d'un seul point, -1, est homéomorphe à un segment semi-ouvert. Il existe ainsi des applications f et g vers $[0, 2\pi[$ qu'on ne peut étendre à S^1.

3. Les points de $X \vee Y$ sont de la forme $\overline{(x,0)}$ pour $x \in X$ ou $\overline{(y,1)}$ pour $y \in Y$, avec l'identification $\overline{(x_0,0)} = \overline{(y_0,1)}$. L'application $f \vee g$ est définie par

$$f \vee g : \begin{cases} \overline{(x,0)} & \longmapsto f(x) \\ \overline{(y,1)} & \longmapsto g(y) \end{cases} .$$

Cette formule définit bien une application $X \vee Y \to Z$ car f et g sont pointées.

4. Les points de $X \cup_\phi e^n$ sont de la forme $\overline{(x,0)}$ pour $x \in X$ ou $\overline{(y,1)}$ pour $y \in D^n$, avec les identifications $\overline{(\phi(y),0)} = \overline{(y,1)}$ pour tout $y \in \partial D^n \approx S^{n-1}$. La formule

$$f \cup_\phi g : \begin{cases} \overline{(x,0)} \longmapsto f(x) \\ \overline{(y,1)} \longmapsto g(y) \end{cases}$$

définit bien une application $X \cup_\phi e^n \to Y$ car $f \circ \phi(y) = g(y)$ pour tout $y \in S^{n-1} \approx \partial D^n$. On vérifie que cette application fait commuter tous les triangles du diagramme ci-dessus. L'unicité est claire également.

5. Notons $x_1 \dots x_n$ un élément de $G *_K H$ où $x_i = j(g)$ et/ou $x_i = i(h)$ ou $g \in G$ et $h \in H$. On définit

$$f(x_i) : \begin{cases} \psi(g) \text{ si } x_i = j(g) \\ \phi(h) \text{ si } x_i = i(h) \end{cases}$$

Notons que f est bien définie car si $x_i = j(\alpha(k)) = i(\beta(k))$ pour $k \in K$, par hypothèse $\phi(g) = \psi(h)$

On définit finalement :

$$\omega \colon G *_K H \to M$$
$$(x_1 \dots x_n) = f(x_1) \dots f(x_n).$$

De manière similaire aux questions précédentes, cette application est unique.

Ces exemples ont pour but d'introduire la propriété universelle qui caractérise les pushouts : on dit qu'un diagramme commutatif dans une catégorie $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & S \end{array}$$

est un pushout s'il vérifie la propriété universelle suivante : pour tout T *et toutes applications* $f' : Z \to T$, $g' : Y \to T$ *telles que* $f' \circ f = g' \circ g$ *(autrement dit, pour tout diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Z & \xrightarrow{g'} & T \end{array}$$

commutatif dans $\mathcal{C}$), il existe un unique morphisme $h : S \longrightarrow T$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "f'"] & \\
Z \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "g'"'] & S \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & T
\end{tikzcd}$$

L'application h est donc uniquement déterminée par f' et g' par la propriété universelle. On dit que f' et g' sont les composantes de h et on note parfois $h = f' \coprod_X g'$.

Dans cet exercice, on a montré en utilisant la propriété universelle du pushout que les carrés suivants

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & X \coprod Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d] \\
D^n \arrow[r] & X \cup_\phi e^n
\end{tikzcd}$$

sont des pushouts dans la catégorie $\mathcal{C} = Top$ des espaces topologiques. Les carrés

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & X \vee Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \cap Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & X \cup Y
\end{tikzcd}$$

sont aussi des pushouts, mais dans les catégories $\mathcal{C} = Top_*$ des espaces topologiques pointés et $\mathcal{C} = Top_{\subset T}$ des sous-espaces de T respectivement. Enfin, le dernier carré est un pushout dans la catégorie Gp des groupes.

Dans la catégorie Top des espaces topologiques, on a la caractérisation suivante des pushouts : un diagramme commutatif d'espaces topologiques

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d] \\
Z \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

est un pushout si et seulement si on peut trouver un homéomorphisme $S \approx \big(Y \coprod Z\big)/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par les relations $f(x) \sim g(x)$ pour tout $x \in X$.

On a des caractérisations analogues des pushouts dans Top_* et $Top_{\subset T}$ en remplacant $X \coprod Y$ par $X \vee Y$ et $X \cup Y$ respectivement.

Exercice 2. On note C_n le groupe cyclique d'ordre n. Identifier les pushouts de groupes suivants :

1. $\mathbb{Z} \leftarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z} \xleftarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z}$

3. $0 \leftarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Z} \xleftarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$
5. $F(n) \leftarrow 1 \rightarrow F(m)$
6. $\mathbb{Z}/2 \xleftarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/3$ où p et q sont les réductions modulo 2 et 3
7. $\mathbb{Z}/m \xleftarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/n$ où p et q sont les réductions modulo m et n
8. $1 \leftarrow F(a) \xrightarrow{xy} F(x,y)$ où l'application xy envoie le générateur a sur xy
9. $1 \leftarrow F(a) \xrightarrow{x^2y^2} F(x,y)$ où l'application x^2y^2 envoie a sur x^2y^2
10. Montrer que ce dernier groupe n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}$ en exhibant un homomorphisme surjectif sur $C_2 \times C_2$.

Remarque. Un amalgame célèbre est $C_4 *_{C_2} C_6$, un groupe isomorphe à $SL_2(\mathbb{Z})$. Un homomorphisme entre ces deux groupes est construit en considérant les matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution 2

1. Il s'agit du produit libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid \rangle$, par définition du coproduit.
2. On a ici un isomorphisme $\mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid ab^{-1} \rangle \cong \langle a \mid \rangle$. En fait à chaque fois que l'un des homomorphismes du pushout est une identité, la propriété universelle permet de voir immédiatement que le pushout est isomorphe au troisième groupe.
3. On retrouve la présentation usuelle du groupe cyclique $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle a \mid a^n \rangle$
4. Il s'agit d'un pushout trivial :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot n} & \mathbb{Z} \\ \| & & \| \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow[\cdot n]{} & \mathbb{Z} \end{array}$$

   Autrement dit, on a un isomorphisme $\mathbb{Z} \cong \langle a \mid \rangle \cong \langle a, b \mid a^n b^{-1} \rangle$
5. Il s'agit du groupe $F(m+n) \cong \langle a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m \mid \rangle$. Les applications de structure $F(n) \to F(n+m)$ et $F(n) \to F(n+m)$ sont données respectivement par $a_i \mapsto a_i$ et $b_j \mapsto b_j$.
6. Puisque $1 \equiv 1 \bmod 2$ et $4 \equiv 1 \bmod 3$, les générateurs associés dans le pushout sont identifiés. Le pushout est donc donné par la présentation $\langle a, b \mid a^2, b^3, ab^{-1} \rangle$. On en déduit $a = b = 1$ et $\langle a, b \mid a^2, b^3, ab^{-1} \rangle \cong 0$ est le groupe trivial.
7. On a la présentation $\langle a, b \mid a^m, b^n, ab^{-1} \rangle$, et on construit un isomorphisme
$$\langle a, b \mid a^m, b^n, ab^{-1} \rangle \cong \langle c \mid c^{pgcd(m,n)} \rangle \cong C_{pgcd(m,n)}$$
8. On a la présentation $\langle x, y \mid xy \rangle \cong \langle x, x^{-1} \mid \rangle \cong \langle x \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$.
9. On obtient $\langle x, y \mid x^2y^2 \rangle \cong \pi_1 K$ où K est la bouteille de Klein. On peut remarquer que la classe de xy dans le quotient engendre un sous groupe normal : de la relation $x^2y^2 = 1$ on déduit $yx = (xy)^{-1}$ puis
$$x(xy)x^{-1} = x^{-1}(xy)x = y(xy)y^{-1} = y^{-1}(xy)y = yx = (xy)^{-1}.$$

Ce sous groupe est cyclique et infini, donc isomorphe à $\mathbb{Z}$. Le quotient admet la présentation

$$\langle x, y \mid x^2y^2, xy\rangle \cong \langle x, y \mid xy\rangle \cong \langle x \mid \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

On obtient donc une suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z} \to \pi_1 K \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Cette suite exacte est scindée car $\mathbb{Z}$ est un groupe libre. Ainsi, le groupe $\pi_1 K$ est un produit semi direct $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$.

10. Un tel homomorphisme est donné par $x \mapsto (-,+)$ et $y \mapsto (+,-)$. Puisque $(-,+)^2 = (+,-)^2$ dans $C_2 \times C_2$, on obtient un morphisme de groupes $\langle x, y \,|\, x^2y^2\rangle \to C_2 \times C_2$. Il est surjectif car $x^\sigma y^\tau \mapsto (\sigma, \tau)$ pour tous $\sigma, \tau \in C_2$. Si $\pi_1 K$ était isomorphe à $\mathbb{Z}$, il serait en particulier cyclique et son générateur aurait pour image par un morphisme vers $C_2 \times C_2$ un élément d'ordre 1 ou 2 et ne pourrait engendrer au mieux qu'un groupe cyclique d'ordre 2.

Exercice 3. Soit I un ensemble. Montrer que $\pi_1(\vee_{i\in I} S^1)$ est un groupe libre.

Solution 3. On utilise Seifert-Van Kampen avec des ouvert U_i contenant le $i-$ème cercle et un voisinage contractile du point base. L'intersection des U_i étant non vide, connexe, contractile, $\pi_1(\vee_{i\in I} S^1)$ est donné par le produit libre de I copies de $\mathbb{Z}$, i.e. le groupe libre à I générateurs.

Exercice 4. Le tore. On se propose de calculer le groupe fondamental du tore.

1. Trouver un recouvrement du tore T^2 par deux ouverts A et B, le second étant contractile. Identifier le type d'homotopie de A, B et $A \cap B$.
2. Identifier les groupes fondamentaux de A, B et $A \cap B$, ainsi que l'homomorphisme induit par l'inclusion $A \cap B \subset A$.
3. Calculer $\pi_1 T^2$.

Solution 4.

1. Dans le modèle du tore comme quotient du carré $I^2 \xrightarrow{q} I^2/\sim\, \approx T^2$ on prend $B = q(I^\circ \times I^\circ) \subset T^2$ et $A = q\big(\, I^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}\,\big)$. Alors $B \approx D^2$ est contractile et
$$A \cap B = q\big(\, I^\circ \times I^\circ \setminus \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}\,\big) \approx I^\circ \times I^\circ \setminus \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}$$
comme q est un homéomorphisme sur $I^\circ \times I^\circ$. On trouve facilement une rétraction par déformation de $I^2 \setminus [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sur le sous-espace $\partial I^2 \approx S^1$ de sorte que $A \cap B \simeq S^1$.
Pour identifier le type d'homotopie de A, on remarque que la rétraction de $I^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ sur le sous-espace ∂I^2 passe au quotient, on a une équivalence d'homotopie qui fixe ∂I^2. On trouve donc $A \simeq S^1 \vee S^1$.
2. On trouve $\pi_1(B) \cong 0$, $\pi_1(A \cap B) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ et $\pi_1(A) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F(a, b)$ le groupe libre à deux générateurs a et b.
Le morphisme $\mathbb{Z} \to F(a, b)$ induit par l'inclusion $A \cap B \subset A$ est donné par $1 \mapsto aba^{-1}b^{-1}$. En effet, avant de passer au quotient la situation est la suivante : un cercle s'inclut dans $A \cap B$ qui s'inclut dans A qui se retracte sur le bord du carré. Selon le choix de point de base le lacet decrit ci-dessus parcourt donc les arètes du carre dans le sens trigonometrique disons. Après passage au quotient on trouve précisement le commutateur.

3. Par le théorème de Seifert-van-Kampen :

$$\pi_1(T^2) \cong \pi_1(A) *_{\pi_1(A\cap B)} \pi_1(B) \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle = \langle a, b \mid ab = ba\rangle.$$

et on obtient donc $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Exercice 5. On considère ici un graphe comme un espace topologique dont les arêtes sont homéomorphes à I et les extrémités sont identifiées si elles correspondent au même sommet. Plus formellement si Γ est un graphe dont les arêtes sont $e \in E$ et les sommets $s \in S$, il s'agit d'une réunion disjointe de copies de I, autant qu'il y a d'arêtes et d'une réunion disjointe de points, autant qu'il y a de sommets : $\coprod_E([0,1], e) \coprod \coprod_S(*, s)$, que l'on quotiente par les relations $(0, e) \sim (*, s)$ si s est l'origine de l'arête e et $(1, e) \sim (*, s)$ si s est son but.

1. Soit Γ un graphe. Montrer que le collapse d'une arête a entre deux sommets distincts produit une équivalence d'homotopie $q\colon \Gamma \to \Gamma/a$.
2. Soit K_4 le graphe complet a 4 sommets. Un graphe complet est tel qu'il y a une arête entre chaque paire de sommets disjoints. Calculer $\pi_1(K_4)$.
3. Plus généralement, étant donné un graphe Γ quelconque, donner une formule pour $\pi_1(\Gamma)$ en terme de son nombre d'arêtes et de sommets.

Solution 5.

1. Le segment I est homotope au point. Une arête reliant deux sommets distincts est homéomorphe à I.
2. On peut contracter 3 arêtes de K_4. Il reste alors trois autres arêtes, donc K_4 est homotope au wedge de 3 cercles, son groupe fondamental est donné par le groupe libre $F(3)$.
3. On réduit d'abord le problème au cas des graphes connexes. En général on peut toujours contracter $\#sommets - 1$ arêtes entre deux sommets distincts. Ainsi, si le nombre de telles arêtes est au moins égal à $\#sommets - 1$,

$$\pi_1(\Gamma) = F(\#aretes - \#sommets + 1)$$

Sinon,

$$\pi_1(\Gamma) = F(\#loop)$$