EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Topologie II **Corrigé 7**

Exercice 1. Montrer que si S^2 est décrite comme l'union de trois fermés A_1, A_2 et A_3, l'un des trois contient nécessairement deux points antipodaux.

Indication : utiliser le théorème de Borsuk-Ulam pour une certaine fonction de distance.

Solution 1. Définissons l'application suivante :

$$d \ : S^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto (\mathsf{dist}(x, A_1), \mathsf{dist}(x, A_2))$$

où $\mathsf{dist}(x, A_i) := \mathsf{inf}_{y \in A_i} |x - y|$.
Par le théorème de Borsuk-Ulam, il existe un couple de points antipodaux tels que $d(x) = d(-x)$. Ensuite, si l'une des coordonnées de $d(x)$ est nulle (disons la $i$ème coordonnée), alors x et $-x$ appartiennent à A_i. Sinon, les deux coordonnées sont strictement positives et $x, -x$ n'appartiennent ni à A_1 ni à A_2, ce qui implique que x et $-x$ appartienne tà A_3.

Exercice 2. Montrer que $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes entre eux.

Solution 2. S'il existe un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, alors il induit un homéomorphisme entre $\mathbb{R} \setminus \{*\}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{*\}$ et $\mathbb{R}^3 \setminus \{*\}$. Or :

— $\pi_0(\mathbb{R} \setminus \{*\}) = \{+, -\}$ tandis que $\mathbb{R}^2 \setminus \{*\}$ et $\mathbb{R}^3 \setminus \{*\}$ sont connexes par arcs.

— $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{*\}) \supseteq \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ (par rétraction) tandis que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{*\}) = \{0\}$ (on peut le prouver en argumentant que tout lacet dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{*\}$ est compact et donc contenu dans une boule de rayon R privée de l'origine, et on peut ensuite contruire une équivalence d'homotopie avec S^2. On peut aussi directement construire une équivalence d'homotopie entre S^2 et $\mathbb{R}^3 \setminus \{*\}$.

Exercice 3. L'argument de Eckmann-Hilton. Soit G un groupe topologique et $m \colon G \times G \to G$ la multiplication. On étudie dans cet exercice le groupe fondamental de G (pour le point de base donné par l'élément neutre 1_G). On définit une loi de composition $\bullet$ sur $\pi_1(G)$. Soient $f, g \colon S^1 \to G$ deux lacets. Le lacet $f \bullet g$ est défini par $(f \bullet g)(t) = m[f(t), g(t)]$.

1. Montrer que $\bullet$ définit bien une loi de composition sur $\pi_1(G)$, c'est-à-dire que $[f \bullet g]$ ne dépend pas du choix des représentants des lacets f et g.
2. Montrer que les lois $\star$ et $\bullet$ vérifient la *loi d'échange* : $(a \star b) \bullet (c \star d) = (a \bullet c) \star (b \bullet d)$.
3. Calculer $(a \star 1) \bullet (1 \star b)$ et $(1 \star a) \bullet (b \star 1)$ pour conclure que $\bullet = \star$ et que cette multiplication est commutative.
4. Conclure que $\pi_1(G)$ est un groupe commutatif.

Solution 3.

1. Si $f \simeq f'$ et $g \simeq g'$ sont des chemins homotopes $S^1 \to G$, on en déduit facilement une homotopie $f \times g \simeq f' \times g'$ entre applications $S^1 \times S^1 \to G \times G$. Alors $f \bullet g$ est donnée par la composée
$$S^1 \xrightarrow{\Delta} S^1 \times S^1 \xrightarrow{f \times g} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

où $\Delta : S^1 \to S^1 \times S^1$ est la diagonale $t \mapsto (t,t)$, et $\mu : G \times G \to G$ est la multiplication du groupe G (qui est continue puisque G est un groupe topologique). Ainsi, comme $f \times g \simeq f' \times g'$, on a $\mu \circ (f \times g) \circ \Delta \simeq \mu \circ (f' \times g') \circ \Delta$, c'est-à-dire $[f \bullet g] = [f' \bullet g']$

2. Si $a, b, c, d : I \to G$ sont des lacets de G, alors le lacet $a \star b$ est défini par
$$t \longmapsto \begin{cases} a(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ b(2t-1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$
et de même pour $c \star d$. Par conséquent, le lacet $(a \star b) \bullet (c \star d)$ est donné par
$$t \longmapsto \begin{cases} a(2t) \cdot c(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ b(2t-1) \cdot d(2t-1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$
et on a donc $(a \star b) \bullet (c \star d) = (a \bullet c) \star (b \bullet d)$ (on remarque que la loi d'échange est vérifiée au niveau des lacets, pas seulement pour les classes d'homotopies).
3. En utilisant que $a \star 1 = a$ et $1 \star b = b$ (a et b étant maintenant des classes d'homotopie), on calcule
$$\begin{aligned} a \bullet b &= (a \star 1) \bullet (1 \star b) \\ &= (a \bullet 1) \star (1 \bullet b) = a \star b \end{aligned}$$
Et comme $a \star 1 = 1 \star a$, idem pour b,
$$\begin{aligned} a \bullet b &= (a \star 1) \bullet (1 \star b) \\ &= (1 \star a) \bullet (b \star 1) \\ &= (1 \bullet b) \star (a \bullet 1) = b \star a \end{aligned}$$
et on déduit que $a \bullet b = b \bullet a = a \star b = b \star a$ pour tous lacets $a, b : I \to B$.
4. Puisque $a \star b = b \star a$ pour tous lacets $a, b : I \to B$, la multiplication induite $[a \star b] = [a] \star [b]$ sur $\pi_1 G$ est commutative. On en déduit que $\pi_1 G$ est abélien.

Exercice 4. Sous-groupe normal engendré par... Soit G un groupe et $g_i, i \in I$ des éléments de G. On considère $H = \langle g_i \mid i \in I \rangle$ le sous-groupe engendré par les g_i et $N = \lhd g_i \mid i \in I \rhd$ le sous-groupe normal engendré par les g_i, i.e. le plus petit sous-groupe normal de G contenant les g_i.

1. Montrer que N est l'intersection de tous les sous-groupes normaux de G contenant les g_i.
2. Montrer que H est un sous-groupe de N, mais que $H \neq N$ en général. On pourra utiliser une permutation dans un groupe symétrique ou un mot dans un groupe libre.

Solution 4.

1. On note $\mathcal{N} = \bigcap_{g_i \in K, K \lhd G} K$ l'intersection de tous les sous-groupes normaux de G contenant les g_i. C'est un sous groupe normal de G. On a alors $\mathcal{N} \subset N$ car N est un sous groupe normal contenant les g_i. Montrons l'inclusion inverse. On sait que N est engendré par les $g g_i g^{-1}$ pour $g \in G$ et $i \in I$. Or si $K \lhd G$ est un sous-groupe normal contenant les g_i, alors $g g_i g^{-1} \in K$ pour tout $g \in G$ et tout $i \in I$. Ainsi on a $N \subset \mathcal{N}$ et finalement $N = \mathcal{N}$.
2. Comme H contient tous les g_i pour $i \in I$, et que H est stable par multiplication et passage à l'inverse, on a $\langle g_i, i \in I \rangle \subset N$, ie. $H \subset N$.
En revanche on a $H \neq N$ en général : si $\tau \in S_n$ est une transposition, alors le sous-groupe $\langle \tau \rangle$ engendré par τ est d'ordre 2 ie. $\langle \tau \rangle \cong C_2$. En revanche, le sous-groupe normal $\lhd \tau \rhd$ engendré par τ contient toutes les transpositions, et donc $\lhd \tau \rhd = S_n \neq \langle \tau \rangle$ pour $n > 2$.

Exercice 5. Présentations. Pour chacun des trois exemples suivants, compter le nombre d'éléments et identifier le groupe en question.

1. $D = \langle a, b \mid a^2, b^4, abab \rangle$
2. $Q = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^3 \rangle$

3⋆. $S = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3, (ac)^2 \rangle$

4. Construire un groupe G tel qu'un homomorphisme $G \to H$ corresponde au choix de trois éléments $x, y, z \in H$ avec x de $3-$torsion, y de $6-$torsion, z de $11-$torsion et enfin $xy = yx$.

Solution 5.

1. Le groupe D compte au plus 8 éléments : $1, a, b, b^2, b^3, ab, ab^2, ab^3$. En effet tout élément peut être représenté par un mot utilisant les lettres a, b, b^2 et b^3 puisque a est d'ordre deux et b d'ordre quatre. La dernière relation est équivalente à dire que dans D on a $aba = b^3$ ou $ab = b^3a$, ce qui implique aussi que $ab^2 = b^2a$ et $ab^3 = ba$. Ainsi tout mot commençant par b peut être converti en un mot commençant par a et dès que le mot fait intervenir ab^ka, on peut réduire sa longueur. Ceci montre que la liste ci-dessus est exhaustive.

   On va montrer que D est isomorphe au groupe dihédral D_8 qui est engendré par une rotation ρ d'ordre 4 et une réflexion axiale r (d'ordre 2).

   Les éléments de D_8 sont donnés par $D_8 = \{\mathrm{id}, r, \rho, r\rho, \rho^2, r\rho^2, \rho^3, r\rho^3\}$ et l'on observe que la relation $r\rho r^{-1} = \rho^{-1}$ est vérifiée. Le morphisme $\varphi\colon F(x, y) \to D_8$ donné par $x \mapsto r$ et $y \mapsto \rho$ passe donc au quotient et définit un morphisme de groupes surjectif

$$\bar{\varphi}\colon \langle x, y \mid x^2, y^4, xyxy \rangle \longrightarrow D_8$$

   Par cardinalité on conclut que D a exactement huit éléments et que finalement on a bien un isomrphisme $D \cong D_8$.

2. $Q = S_3$. Voir la preuve du lemme 2.5 dans le polycopié de J. Scherer.
3. On va montrer que $S \cong S_4$, le groupe symmétrique sur 4 symboles. Soit $N = \lhd ac \rhd \subset S$ le sous-groupe normal engendré par ac. On vérifie que N est d'ordre 4. Ses éléments sont $1, ac, bacb, cbacbc$. Le quotient S/N admet la présentation $\langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3, (ac) \rangle \cong \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^3 \rangle$.

   Etudions maintenant ce quotient $S/N \cong \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^3 \rangle$. Il admet 6 éléments $1, a, b, ab, ba, aba$. On identifie ce groupe avec le groupe symmétrique S_3 via le morphisme de groupes $a \mapsto (12)$, $b \mapsto (23)$. La relation $(12)(23) = (123)$ assure que ce morphisme est défini et surjectif. L'injectivité découle comme précedemment du fait que les éléments $1, (12), (23), (123), (132), (13)$ sont distincts dans S_3.

   De l'isomorphisme $S/N \cong S_3$ on conclut que S est d'ordre 24. On définit un morphisme de groupes surjectif $f : S \to S_4$ par $a \mapsto (12)$, $b \mapsto (23)$, $c \mapsto (34)$. Cela est possible par la propriété universelle du groupe S et le fait que les relations $(12)^2 = (23)^2 = (34)^2 = (123)^3 = (132)^2 = (12)(34)(12)(34)$ sont vérifiées dans S_4. Puisque S et S_4 ont même ordre, on en déduit que f est un isomorphisme $S \cong S_4$.

4. On pose $G = \langle x, y, z \mid x^3, y^6, z^{11}, xyx^{-1}y^{-1} \rangle$. Etant donné un homomorphisme $\phi\colon G \to H$, $\phi(x), \phi(y), \phi(z)$ sont trois éléments $x, y, z \in H$ avec $\phi(x)$ de $3-$torsion, $\phi(y)$ de $6-$torsion, $\phi(z)$ de $11-$torsion et enfin $\phi(x)\phi(y) = \phi(y)\phi(x)$.

   Réciproquement, étant donné trois tels éléments, la propriété universelle des groupes libres permet de construire un morphisme du groupe libre engendré par trois éléments vers G avec les trois éléments choisis comme image des générateurs, et les hypothèses sur ces éléments assurent que $x^3, y^6, z^{11}, xyx^{-1}y^{-1}$ appartiennent au noyau et donc que ce morphisme passe au quotient et induisent un morphisme de G vers H.