EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025

Topologie II **Corrigé 5**

Exercice 1.

1. Montrer que $\Sigma A/(A \times \{1/2\})$ est homotope au wedge $\Sigma A \vee \Sigma A$.
2. Rappeler la définition de l'opération de concaténation et de l'opération produit via le pinch pour $n = 1$.
$$*, \cdot \colon \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$
et montrer que ces deux opérations coincident.

Solution 1.

1. On exhibe en fait un homéomorphisme $\Sigma A/(A \times \{1/2\}) \approx \Sigma A \vee \Sigma A$. Les points du wedge $\Sigma A \vee \Sigma A$ sont notés $(a,t)_i$ avec $a \in A$, $t \in [0,1]$ etle sous-exposant indique que le point appartient à la $i-$ème copie, $i = 1, 2$. On a les identifications $(a,1)_1 = (a',0)_2$, $(a,t)_i = (a',t)_i$ pour $a, a' \in A$, $t = 0, 1$ et $i = 1, 2$.
On définit une application $f : \Sigma A \to \Sigma A \vee \Sigma A$ par
$$f(a,t) = \begin{cases} (a, 2t)_1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (a, 2t-1)_2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$
On vérifie que f passe au quotient car $f((a, \frac{1}{2})) = f((a', \frac{1}{2}))$ pour tous $a, a' \in A$. Elle induit donc une application $\varphi : \Sigma A/(A \times \{1/2\}) \to \Sigma A \vee \Sigma A$. De plus, φ est bijective car $(a,t)_1 \mapsto (a, \frac{t}{2})$, $(a,t)_2 \mapsto (a, \frac{1+t}{2})$en fournit un inverse. Finalement φ fournit un homéomorphisme $\Sigma A/(A \times \{1/2\}) \approx \Sigma A \vee \Sigma A$.
2. Soient γ, γ' deux lacets basés en x_0. Montrons que $\gamma * \gamma' = \gamma \cdot \gamma'$.
Ici, on utilise l'identification $S^1 = I/\sim$ et pour simplifier la notation, on écrit encore t pour l'image de t dans S^1.
Ainsi, en utilisant le point 1, si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, $p(t) = (2t)_1$, le point est dans la première copie de $S^1 \vee S^1$, et on applique γ à $p(t)$. Ainsi, $\gamma \cdot \gamma'(t) = \nabla((\gamma(2t))_1) = \gamma(2t) = \gamma * \gamma'(t)$.
De même, si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, $p(t) = (2t-1)_2$, le point est dans la deuxième copie de $S^1 \vee S^1$ et on applique γ' à $p(t)$. Ainsi, $\gamma' \cdot \gamma(t) = \nabla((\gamma'(2t-1))_2) = \gamma'(2t-1) = \gamma * \gamma'(t)$.

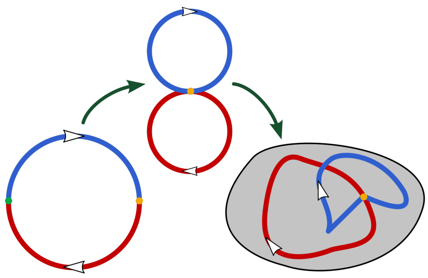


Illustration : Page Wikipedia sur le Groupe fondamental

Exercice 2.

Démontrer l'associativité de l'opération produit $\cdot$ pour $n = 1$.

Indication : on dit qu'un diagramme
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & B \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

commute à homotopie près si $f \circ g \simeq h \circ i$. On pourra utiliser le diagramme vu en cours et montrer qu'il commute à homotopie près.

Solution 2. Etant donné α, β, γ, on a $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \simeq \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ si le diagramme

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"] & S^1 \vee S^1 \arrow[d, "id \vee p"] \\ S^1 \vee S^1 \arrow[r, "p \vee id"] & S^1 \vee S^1 \vee S^1 \end{tikzcd}$$

commute à homotopie près. On a :

$$(id \vee p) \circ p(t) = \begin{cases} (2t)_1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (4t-2)_2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ (4t-3)_3 & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

où l'on écrit encore t pour l'image de t dans S^1, et on utilise le sous-exposant $i \in \{1, 2, 3\}$ pour indiquer que l'élément appartient à la $i-$ème copie de S^1 dans le wedge. De même, on calcule :

$$(p \vee id) \circ p(t) = \begin{cases} (4t)_1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (4t-1)_2 & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2t-1)_3 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

On construit finalement une homotopie $H\ : S^1 \times I \to S^1 \vee S^1 \vee S^1$ de $(p \vee id) \circ p$ vers $(id \vee p) \circ p$.

$$H(t, s) = \begin{cases} (\frac{4t}{1+s})_1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ (4t-1-s)_2 & \text{si } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ (\frac{4t-2-s}{2-s})_3 & \text{si } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Il faut vérifier que cette homotopie est bien définie (c'est à dire que l'image de $(\frac{1+s}{4}, s)$ par exemple est unique) et continue.

Exercice 3. Le tore à deux trous

En topologie, une surface est un espace topologique séparé dont chaque point admet un voisinage homéomorphe au disque ouvert $D^2 \setminus \partial D^2$. Etant donné deux surfaces on définit leur somme connexe à homéomorphisme près, comme la surface obtenue en retirant un ouvert homéomorphe à un disque à chacune des surfaces, et en identifiant les bords. On note $S_1 \sharp S_2$. On appelle tore à g trous (ou tore de genre g), la somme connexe $T\sharp \ldots \sharp T$ de g tores $T = S^1 \times S^1$.

1. Donner une description du tore à deux trous comme quotient d'un octogone, à la manière dont le tore est obtenu comme quotient du carré.
2. Identifier une structure cellulaire de ce tore à deux trous. On demande en particulier de calculer le nombre de 0-cellules, de 1-cellules et de 2-cellules, puis de décrire les applications d'attachement.
3. (optionnel) Généraliser au tore à 3 puis à g trous.

Solution 3.

1. On etiquette les différentes arêtes du bord de l'octogone O comme suit : $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$. Son quotient $O/\sim$ par la relation d'équivalence engendrée par les identifications des arêtes a, b, c, d est homéomorphe à $T\#T$, le tore à 2 trous. Pour s'en convaincre, on peut visionner les animations suivantes : `https://youtu.be/1XM1CatvwqY$` et `https://youtu.be/I83K-on4X5A`, venant du site `https://analysis-situs.math.cnrs.fr/`.
2. Le bord ∂O du polygône P est tel que son image dans le quotient $O/\sim$ est un bouquet de 4 cercles, donc 4 cellules de dimension 1 et une cellule de dimension 0. Le tore à 2 trous est obtenu à partir de ce bouquet en recollant une 2-cellule : $T\#T \cong \bigvee_1^4 S^1 \cup_f e^2$. L'application d'attachement $f : S^1 \longrightarrow \bigvee_1^4 S^1$ est donnée par la composée

$$S^1 \xrightarrow{\approx} \partial O \xrightarrow{\subset} O \xrightarrow{q} \bigvee\nolimits_1^4 S^1 \subset O/\sim$$

3. On considère un polygône P régulier à 4g côtés dans le plan $\mathbb{R}^2$ dont on étiquète les différentes arêtes du bord comme suit $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Son quotient $P/\sim$ par la relation d'équivalence engendrée par les identifications des arêtes $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ est homéomorphe à $T\# \ldots \# T$, le tore à g trous. Voici une dernière animation pour la route, avec le tore à trois trous : `https://youtu.be/hSuUDPhJg6c`.

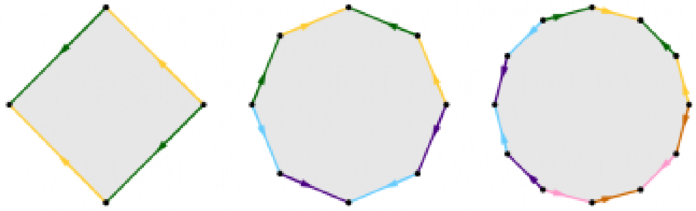


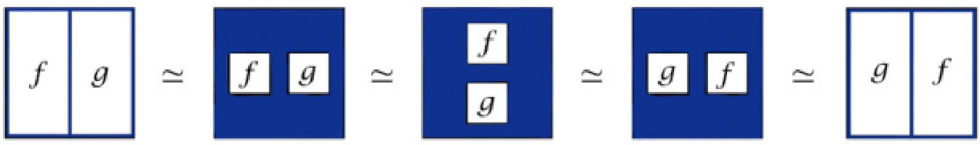
Illustration des identifications pour le tore, le tore à deux trous et le tore à trois trous. Tirée de `https://analysis-situs.math.cnrs.fr/-Introduction-a-l-Analysis-situs-par-les-surfaces-.html`

Exercice 4.

1. Montrer que le produit des groupes d'homotopie est commutatif pour $n = 2$. On pourra utiliser une représentation graphique d'une homotopie entre $f \cdot g$ et $g \cdot f$, en présentant S^2 comme quotient d'un carré par son bord.
2. Montrer que le produit des groupes d'homotopie est commutatif pour $n \geq 2$.

Solution 4.

1. La meilleure preuve est par l'illlustration suivante (tirée du livre de Hatcher, p.340) :



   On part de $f \cdot g$. Puisque f et g envoient le bord du disque/rectangle sur le point base, on peut construire une homotopie vers une fonction où le bord est épaissi, envoyant toute la partie bleue vers le point de base x_0.
   On peut alors construire une homotopie qui fait tourner les domaines de f et g l'un autour de l'autre de manière à ce qu'ils ne s'intersectent pas. En agrandissant les domaines à nouveau on obtient $g \cdot f$.
2. Plus formellement, si f et g sont deux applications dans $\pi_n(X, x_0)$, on considère $j_g : I_n \to I_n$ (resp. $j_d : I_n \to I_n$) données par
$$j_g(s_1, \ldots, s_n) = \left(\frac{1}{2}s_1, s_2, \ldots, s_n\right)$$
   (resp.
$$j_d(s_1, \ldots, s_n) = \left(\frac{1}{2}(s_1 + 1), s_2, \ldots, s_n\right).$$
   On peut trouver deux homotopies $h_t : I_n \to I_n$ et $\tilde{h}_t : I_n \to I_n$, $t \in [0, 1]$, de sorte que $h_0 = \tilde{h}_1 = j_g$, $h_1 = \tilde{h}_0 = j_d$ et pour tout $t \in [0, 1]$, h_t et $\tilde{h}_t$ sont des plongements pour lesquels $h_t(I_n)$ et $\tilde{h}_t(I_n)$ ne s'intersectent que en des points de leurs frontières.
   Alors on peut définir pour tout $t \in [0, 1]$ l'application $k_t : I_n \to I_n$ par
$$k_t(x) = f(h_t^{-1}(x)) \text{ si } x \in h_t(I_n), \quad k_t(x) = g(\tilde{h}_t^{-1}(x)) \text{ si } x \in \tilde{h}_t(I_n), \quad \text{et } k_t(x) = x_0 \text{ dans tous les autres cas.}$$
   et $k(x, t) = k_t(x)$ définit une homotopie entre $f \cdot g$ et $g \cdot f$.
   Notez qu'il existe un autre argument équivalent, très intéressant car complètement algébrique, pour démontrer ce fait, qui consiste à utiliser le théorème de Eckmann-Hilton.
   Voir par exemple : `https://idrissi.eu/post/eckmann-hilton`.

Exercice 5*. Le groupe fondamental de la sphère. Montrons que $\pi_1 S^2 = 1$.

1. Montrer que tout lacet dans $(\mathbb{R}^2, (a; b))$ est homotope au lacet constant au point de base $(a; b)$.

2. Montrer que deux chemins qui ont les mêmes extrémités dans $\mathbb{R}^2$ sont homotopes via une homotopie qui fixe les points de départ et d'arrivée.
3. Si $f\colon S^1 \to S^2$ est un lacet non surjectif, montrer que f est homotope au lacet constant.
4. Si f est un lacet surjectif (c'est possible : voir "courbe remplissante" sur Wikipedia), choisir un recouvrement de S^2 par deux ouverts et montrer que f est homotope à une concaténation finie de chemins se trouvant soit dans l'un des ouverts soit dans l'autre. Conclure qu'aussi ici f est homotope au lacet constant.

Solution 5*.

1. En effet $\mathbb{R}^2$ est homotope au point, donc en partiulier $\pi_1(\mathbb{R}^2, (a;b)) = 1$ par invariance.
2. Soit γ, γ' deux chemins dans $\mathbb{R}^2$ d'extrémités x et y. Alors $H(t,s) = s\gamma(t) + (1-s)\gamma'(t)$ est une homotopie $\gamma \simeq \gamma'$ qui fixe les deux extrémités.
3. Soit $x \in S^2$ un point qui n'est pas atteint par f. Alors f factorise par l'inclusion $S^2 \setminus \{x\} \subseteq S^2$. Or, par projection stéréographique, $S^2 \setminus \{x\} \approx \mathbb{R}^2 \simeq *$ est contractile. On en déduit que f est homotope au lacet constant.
4. Comme f est continue, on peut trouver un $n \geq 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < 2$ pour tous $x, y \in S^2$ tels que $|x - y| \leq \frac{1}{n}$. Pour $0 \leq k < n$ notons f_k la restriction de f à l'intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ et $x_k = f(\frac{k}{n})$. Alors f est la concaténation $f_0 \star \cdots \star f_{n-1}$. Chaque f_k est à valeurs dans $\{x \in S^2 \,|\, |x - x_k| < 2\} \approx S^2 \setminus \{-x\} \approx \mathbb{R}^2 \simeq *$. Par la question 2, f_k est homotope au segment $\gamma_k : t \mapsto tx_k + (1-t)x_{k+1}$. Ainsi f est homotope à $\gamma = \gamma_0 \star \cdots \star \gamma_{n-1}$. Or γ est une concaténation finie de segments donc n'est pas surjective. Par la question précédente, on conclut que f est homotope au lacet constant.