EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
**Topologie II** **Corrigé de la série 4**

**Exercice 1.** On montre dans cet exercice les versions pointées des résultats expliqués en cours. On note $\mathcal{C}_*$ pour indiquer l'ensemble de toutes les applications continues et pointées.

1. Soit $f\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$ une application pointée. Montrer que pour tout espace pointé $(A,a_0)$ l'application induite par la composition $f_*\colon \mathcal{C}_*(A,X)\to\mathcal{C}_*(A,Y)$ passe au quotient et définit une application $f_*\colon [A,X]_*\to[A,Y]_*$.
2. Soient $f,g\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$ deux applications pointées homotopes (dans le sens pointé). Montrer que pour tout espace pointé $(A,a_0)$ les applications induites $f_*,g_*\colon [A,X]_*\to[A,Y]_*$ sont égales.
3. Soient $(X,x_0)$ et $(Y,y_0)$ deux espaces pointés homotopes. Montrer qu'on a une bijection d'ensembles $[A,X]_*\cong[A,Y]_*$ pour tout espace pointé $(A,a_0)$.

**Solution 1.**

1. La preuve est formellement identique au cas non pointé, à l'exception qu'une homotopie $f\simeq g$ d'applications pointées $X\to Y$ prend maintenant la forme d'une application continue $h : X\rtimes I\to Y$. La notation $X\rtimes Y$ avec un espace pointé $(X,x)$ et un espace non pointé $Y$ désigne le collapse $X\rtimes Y=(X\times Y)/\{x\}\times Y$. Ceci assure que pour tout $t\in I$, l'application $h(\cdot,t) : X\to Y$ est une application pointée.

   Si $u\simeq v : A\to X$ sont des applications pointées homotopes, une telle homotopie $h$ fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "A\rtimes\{0\}"'] \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "f_*u"] & & \\
A\rtimes I \arrow[r, "h"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
A \arrow[u, "A\rtimes\{1\}"] \arrow[ur, "v"'] \arrow[urr, bend right, "f_*v"'] & &
\end{tikzcd}$$

   de sorte que $f\circ h$ fournit une homotopie $f_*u\simeq f_*v$. Il en résulte que $f_*$ induit une application $[A,X]_*\to[A,Y]_*$ sur les classes d'homotopie.

2. Le raisonnement est similaire : une homotopie $h : f\simeq g$ fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
A\rtimes I \arrow[r, "u\rtimes I"] & X\rtimes I \arrow[u] \arrow[d] \arrow[rr, "h"] & & Y \\
A \arrow[r, "u"'] \arrow[u, "i_1"] & X \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

   pour tout $u : A\to X$, et fournit donc une homotopie $f_*u\simeq g_*u$. En conséquence, les applications induites $f_*,g_* : [A,X]_*\to[A,Y]_*$ sont égales

3. Puisque $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$, on dispose d'applications pointées $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ et d'homotopies $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ et $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Par le point précédent, on voit que les applications induites $f_*, g_*$ sont inverses l'une de l'autre, et forment donc des bijections $[A, X]_* \cong [A, Y]_*$.

**Exercice 2.** Montrer que les espaces suivants sont tous homotopes deux à deux : le cercle $S^1$, le ruban de Möbius, le plan privé d'un point $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$.

**Solution 2.**

On détaille le cas du ruban de Möbius que l'on identifie au carré $[-1,1] \times [-1,1]$ avec les identifications $(-1,t) \sim (1,-t)$ pour tout $-1 \leq t \leq 1$. Alors l'application $h : M \times I \to M$ définie par $((t,t');s) \mapsto (st,t')$ est une homotopie entre $id_M$ et $\iota \circ p$, où $p\colon M \to S^1$ est la projection sur le cercle central (donnée par $(t,t') \mapsto (0,t')$) et $\iota\colon S^1 \to M$ l'inclusion de celui-ci. De plus $p \circ \iota = id_{S^1}$, donc ces deux applications $p$ et $\iota$ sont des équivalences d'homotopie.

**Exercice 3.** Soient $f\colon A \to X$ et $g\colon X \to Y$.

(a) Montrer que $f$ est homotope à une application constante si et seulement si on peut étendre $f$ à une application $F\colon CA \to X$ (telle que $F(a,1) = f(a)$).

(b) Montrer qu'on peut étendre $g$ à une application $G\colon X \cup_f CA \to Y$ si et seulement si $g \circ f$ est homotope à une application constante.

**Solution 3.**

(a) On rappelle que le cône $CA$ est le quotient du cyclindre $A \times I$ dont on collapse un couvercle, disons $A \times 0$. Soit $i\colon A \to A \times I$ l'inclusion de $A$ dans l'autre couvercle, i.e. $i(a) = (a;1)$.

La propriété universelle du quotient assure que les applications $F\colon CA \to X$ qui prolongent $f$, c'est-à-dire que $F \circ i = f$, sont en correspondance bijective avec les applications $A \times I \to X$ qui sont constantes sur $A \times \{0\}$, et égales à $f$ sur $A \times \{1\}$.

La donnée d'une application $CA \to X$ correspond ainsi précisément à la donnée d'une application $f : A \to X$ et d'une homotopie $f \simeq \mathrm{const}_{x_0}$. Par conséquent $f$ admet un prolongement à $CA$ si et seulement si $f$ est homotope à une application constante.

(b) Par la propriété universelle du pushout, $g$ s'étend en une application $\overline{g} : X \cup_f CA \to Y$ si et seulement s'il existe une application $G : CA \to Y$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "g"] \\ CA \arrow[r, "G"'] & Y \end{tikzcd}$$

commute, c'est-à-dire qu'on peut étendre $g \circ f$ en une application $G : CA \to Y$. Par la partie (a), ceci est possible si et seulement si $g \circ f$ est null-homotope (i.e. homotope à une application constante).

**Exercice 4. Type d'homotopie d'un wedge.**

1. Soient $A$ et $B$ deux espaces topologiques. Montrer que

$$\pi_0(A \vee B) = \pi_0(A) \vee \pi_0(B)$$

Soit $X$ le sous-espace de $\mathbb{R}$ formé des points 0 et $1/n$ pour tout entier $n \geq 1$. On construit $Y_0$ le wedge de $(X, 0)$ avec $(X, 0)$ et $Y_1$ le wedge de $(X, 1)$ avec $(X, 1)$ (le point de base change).

2. Calculer $\pi_0(X)$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune bijection continue $Y_0 \to Y_1$.
4. Montrer que $Y_0$ et $Y_1$ n'ont pas le même type d'homotopie.

**Solution 4.**
Ici, on utilise que le $\pi_0$ est un ensemble pointé (le point base étant la composante connexe par arc du point base), de sorte que cela fait sens de considérer le wedge. On a pas besoin de la topologie pour construire le wedge comme ensemble quotient. On peut donc traiter cette question de manière purement ensembliste. Sinon, on peut munir le $\pi_0$ de la topologie discrète, ou encore, comme vous allez le voir en cours, d'une topologie quotient. Cela étant dit, il n'y a pas d'utilité à munir le $\pi_0$ d'une topologie et vous pouvez retenir que c'est un ensemble (pointé).

1. La seule chose à vérifier est qu'un élément de $A$ et un élément de $B$ ne sont reliés par un chemin que s'ils sont chacun dans la composante connexe du point d'attache (ou point base) de leur espace. La topologie du wedge est construite à partir de celle de $A$ et $B$, de leur union disjointe et du quotient. Ainsi, l'image de $A$ et de $B$ dans le wedge est fermée et leur complément est donc ouvert. Ainsi un chemin continu entre $x \in A$ et $y \in B$ tous les deux distincts du point base dans $A \vee B$ est tel que la préimage de $A$ est un fermé de $I$ contenant 0. Il existe donc un maximum $i_0$ dont l'image est nécessairement le point base. On le déduit en faisant le même raisonnement pour la préimage de $B$, qui est fermée et contient 1, puisqu'on sait que la réunion des deux préimages est $I$, et leur intersection qui contient $i_0$ ne peut être envoyée que sur le point base. On en déduit que $x$ et $y$ sont dans les composantes connexes des points bases.
2. L'espace $X \setminus \{0\} = \{\frac{1}{n} \mid n > 0\}$ ne contient que des points isolés. Pour chaque $n > 0$ on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que $]\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon[ \cap X = \{\frac{1}{n}\}$ de sorte que tous les singletons $\{\frac{1}{n}\}$ sont des ouverts de $X$ pour $n > 0$.

   Par ailleurs, si $\gamma : I \to X$ est un chemin tel que $\gamma(0) = 0$, alors $\gamma(t) = 0$ pour tout $t \in I$. Sinon, on aurait $\gamma(t) = \frac{1}{n}$ pour un $n > 0$ et $t \in I$. Alors comme $\frac{1}{n}$ est un point isolé de $X$ on a $\gamma(t) = \frac{1}{n}$ pour tout $t \in I$, ce qui est absurde. Ainsi $\{0\}$ est une composante connexe par arcs de $X$.

   Finalement, $X$ est totalement discontinu (on a une bijection $\pi_0(X) \cong X$) et on trouve $\pi_0(X) = \mathbb{N}$.

3. On note les points de $Y_0$ et $Y_1$ comme suit :

$$Y_0 = \{1 - \tfrac{1}{n} \mid n > 0\} \cup \{1\} \cup \{1 + \tfrac{1}{n} \mid n > 0\} \subset \mathbb{R}$$
$$Y_1 = \{0\} \cup \{\tfrac{1}{n} \mid n > 0\} \cup \{2 - \tfrac{1}{n} \mid n > 0\} \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$$

Supposons qu'il existe une telle bijection continue $f : Y_0 \to Y_1$. Alors $f$ doit préserver les points d'accumulation. En effet, si $x \in Y_0$ est un point d'accumulation, on peut trouver une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $Y_0$ tels que $x_n \to x$ quand $n \to \infty$ et $x_n \neq x$ pour tout $n$. Alors $f(x_n) \to f(x)$ car $f$ est continue et $f(x_n) \neq f(x)$ pour tout $n$ car $f$ est bijective. Donc $f(x)$ est un point d'accumulation de $Y_1$.

Dans $Y_0$ le point 1 est d'accumulation, alors que dans $Y_1$ les points 0 et 2 sont d'accumulation. On a alors $f(1) = 0$ ou 2. Traitons le cas $f(1) = 0$. Notons $y$ l'unique point de $Y_0$ tel que $f(y) = 2$ et soit $W$ un voisinage de $y$. Comme $f$ est continue, on peut trouver un voisinage $V$ de 2 dans $Y_1$ tel que $f^{-1}(V) \subset W$. Comme 2 est un point d'accumulation dans $Y_1$, $V$ contient une infinité de points. Puisque $f$ est bijective, $f^{-1}(V) \subset W$ contient aussi une infinité de points. Or $W$ est quelconque, et on trouve donc que tout voisinage de $y$ dans $Y_0$ contient une infinité de points. Ainsi, on doit avoir $y = 1$, ce qui est absurde car $f(1) = 0$ par hypothèse.

Remarque : En fait on a montré qu'une bijection continue $f : X \to Y$ préserve et crée les points d'accumulation, c'est-à-dire que $x$ est un point d'accumulation de $X$ si et seulement si $f(x)$ est un point d'accumulation de $Y$.

4. Par les points 1 et 2, on trouve que $Y_0$ et $Y_1$ sont totalement discontinus (on a des bijections $\pi_0(Y_i) \cong Y_i$ ). Une équivalence d'homotopie $f : Y_0 \to Y_1$ induit en particulier une bijection $\pi_0(f) : \pi_0(Y_0) \cong \pi_0(Y_1)$. Puisque ces espaces sont totalements discontinus, $f$ coincide avec $\pi_0(f)$ de sorte que $f$ est une bijection continue $Y_0 \to Y_1$. Par le point 3, une telle bijection ne peut exister. Ainsi, $Y_0$ et $Y_1$ n'ont pas le même type d'homotopie.

**Exercice 5$\star$.** Soit $\omega = e^{2\pi i/3}$ une racine troisième de l'unité. On définit une action du groupe cyclique à trois éléments $C_3$ sur la sphère $S^3 = \{(a;b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\}$ en faisant agir le générateur par $(a;b) \mapsto (\omega a; \omega^2 b)$. L'espace quotient $S^3/C_3$ est un *espace lenticulaire*, noté $L(3,2)$. On considère trois points $e_0^0 = (1;0), e_1^0 = (\omega;0)$ et $e_2^0 = (\omega^2;0)$ et on définit pour $0 \leq r \leq 2$ :

$$
\begin{aligned}
e_r^1 &= \{(e^{i\theta};0) \mid 2\pi r/3 \leq \theta \leq 2\pi(r+1)/3\} \\
e_r^2 &= \{(\rho e^{i\theta}; \sqrt{1-\rho^2}e^{2\pi i r/3}) \mid 0 \leq \theta < 2\pi; 0 \leq \rho \leq 1\} \\
e_r^3 &= \{(\rho e^{i\theta}; \sqrt{1-\rho^2}e^{i\theta'}) \mid 0 \leq \theta < 2\pi; 0 \leq \rho \leq 1; 2\pi r/3 \leq \theta' \leq 2\pi(r+1)/3\}
\end{aligned}
$$

1. Montrer que $L(3,2)$ est compact.
2. Montrer que $e_r^m$ est homéomorphe à un disque $D^m$ dont le bord est constitué de cellules $e_r^i$ avec $i < m$.
3. Montrer que l'action de $C_3$ permute transitivement ces cellules.
4. Conclure que $L(3,2)$ admet une structure cellulaire $e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup e^3$ avec exactement une cellule de dimension $m$ pour tout $0 \leq m \leq 3$.

**Solution 5$\star$.**

1. $L(3,2) = S^3/C_3$ est compact car c'est un quotient de $S^3$ qui est compact.
2. Les 2-cellules sont décrites via une paramétrisation par un angle $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et un module $0 \leq \rho \leq 1$. On voit donc que $e_r^2$ est de fait l'image d'un rectangle $[0, 2\pi] \times [0,1]$. Analysons

cette image plus en détail puisqu'elle n'est pas homéomorphe au rectangle. En effet le segment $[0, 2\pi] \times 0$ est envoyé constamment sur $(0, e^{2\pi r/3})$ et comme la formule donnée coïncide en $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$, la prétendue 2-cellule est l'image du collapse de ce rectangle par un côté et dont on identifie deux autres côtés opposés. Ce quotient est homéomorphe à un disque (dont le bord provient de $[0, 2\pi] \times 1$ et le centre est l'image du segment $\rho = 0$). On vérifie ensuite que sur ce quotient la formule $(\rho e^{i\theta}, \sqrt{1-\rho^2}e^{2\pi r/3})$ définit un homéomorphisme avec $e^2_r$.

De même, et sans entrer trop dans les détails, les $e^3_r$ sont des images de cubes $[0, 2\pi] \times [0, 1] \times [2\pi r/3, 2\pi(r+1)/3]$. Les identifications qui sont faites, si on pense au nouveau paramètre $\theta'$ comme étant vertical, sont les suivantes : la face verticale $\rho = 0$ est contractée horizontalement en un segment vertical (qui va devenir l'âme du cylindre que je décris dans ma phrase suivante). Les deux faces verticales adjacentes $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$ sont identifiées si bien qu'on peut penser à ce stade à un cylindre vertical dont les bases horizontales viennent des faces horizontales du cube, $\theta' = 2\pi r/3$ et $\theta' = 2\pi(r+1)/3$. Le bord vertical est encore contracté verticalement en un cercle et c'est ce quotient qui est homéomorphe à $e^3_r$.

3. Le générateur $g$ de $C_3$ agit sur les $e^n_r$ par $g.e^n_r = e^n_{r+1}$. On en déduit que l'action de $C_3$ permute transitivement les $e^n_r$ pour chaque $n$.

4. Les $e^n_r$ définissent une structure cellulaire sur $S^3$ donnée par $S^3 = \bigcup_{n=0}^3 \bigcup_{r=0}^2 e^n_r$. On a trois $n$-cellules pour chaque $n = 0, 1, 2, 3$ (12 cellules en tout). Cette structure est compatible avec l'action de $C_3$. Elle passe donc au quotient et définit une structure cellulaire $L(3, 2) = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup e^3$ comportant une seule $n$-cellule pour chaque $n = 0, 1, 2, 3$, donnée par $e^n = [e^n_r]$.