EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
**Topologie II** **Corrigé série 3**

**Exercice 1.** Soit $G$ un groupe topologique.

1. Supposons $G$ séparé. Soit $H$ un sous-groupe de $G$. Montrer que $G/H$ est séparé si et seulement si $H$ est fermé dans $G$.

   *Indication.* Définir $f\colon G \times G \to G$ par $f(x, y) = x^{-1}y$ et identifier la préimage de $H$ comme le graphe de la relation définie par le passage au quotient par $H$.

2. Soit $H$ un sous-groupe normal de $G$. Montrer que $G/H$ est un groupe topologique.

**Solution 1.**

1. On note $\pi : G \to G/H$ l'application quotient. Notons $\pi(g) = gH$.

   $\Rightarrow$. Supposons $G/H$ séparé. Soit $g \in G$ tel que $g \notin H$. On peut trouver des ouverts disjoints $U, V \subset G/H$ contenant respectivement $gH$ et $e_G H$. Alors $\pi^{-1}(U)$ est un voisinage de $g$ dans $G$ qui ne rencontre pas $H$. On en déduit que $H \subset G$ est fermé.

   $\Leftarrow$. Supposons $H \subset G$ fermé. L'application quotient $\pi\colon G \to G/H$ est ouverte comme expliqué en cours (Proposition 4.11). Le graphe $\Gamma$ de la relation des classes à droite pour $H$ est par définition l'ensemble des paires de la forme $(g, gh)$, i.e. la préimage par $f$ de $H$. Ce graphe est donc fermé par continuité de $f$.

   Considérons alors deux classes distinctes $gH \neq g'H$, ce qui veut dire que $(g, g') \notin \Gamma$. Ce graphe étant fermé et $G$ séparé il existe des voisinages ouverts disjoints $U \ni g$ et $U' \ni g'$ tels que $U \times U'$ ne rencontre pas $\Gamma$. Comme $\pi$ est ouverte les images $\pi(U)$ et $\pi(U')$ sont alors des voisinages ouverts de $gH$ et $g'H$ qui sont disjoints.

   Remarque suite à une question de certains d'entre vous : on ne peut pas supposer en général que l'application quotient est fermée. La preuve que l'application quotient est ouverte utilise qu'une union infinie d'ouverts est ouverte, et ne fonctionne pas pour les fermés. Par exemple, le quotient vu en cours de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}$ est $S^1$ et l'image du fermé $\sqrt{2} + \mathbb{Z}$ est dense mais pas égale à $S^1$, elle n'est donc pas fermée.

2. Comme vu en théorie des groupes, $H$ est normal implique que $G/H$ est un groupe pour la multiplication $m(gH, g'H) = gg'H$. Il faut montrer que celle ci est continue et que son inverse $\iota$ l'est aussi. Notons $m_G$ et $\iota_G$ la multiplication et l'inverse de $G$. On a un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "m_G"] \arrow[d, "\pi\times\pi"] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \times G/H \arrow[r, "m"] & G/H \end{tikzcd}$$

   Soit $U$ un ouvert de $G/H$. Montrons que $m^{-1}(U)$ est ouvert. Comme $(\pi \times \pi)^{-1}(m^{-1}(U)) = m_G^{-1}(\pi^{-1}(U))$, et $\pi \circ m_G$ est continue, $(\pi \times \pi)^{-1}(m^{-1}(U))$ est ouvert. Comme $\pi$ est ouverte, le produit $\pi \times \pi$ l'est aussi donc $m^{-1}(U)$ est ouvert.

   Pour l'inverse, le même argument fonctionne avec le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\iota_G"] \arrow[d, "\pi"] & G \arrow[d, "\pi"] \\
G/H \arrow[r, "\iota"] & G/H.
\end{tikzcd}$$

**Exercice 2.**

1. Montrer que le cône $CA$ et la suspension $\Sigma A$ sont séparés si $A$ est séparé.
2. Montrer que le cône $CA$ et la suspension $\Sigma A$ sont compacts si $A$ est compact.
3. Montrer que $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$ et déduire $\Sigma^n S^0 \approx S^n$.

**Solution 2.**

1. Si $\overline{(x,t)} \neq \overline{(x',t')}$ sont des points distincts de $CA$, alors comme $A \times I$ est séparé, on peut trouver des ouverts $U, V \subset A \times I$ qui séparent $(x,t)$ et $(x',t')$. Lorsque $t$ et $t'$ sont non nuls on peut s'arranger pour que ces voisinages ne rencontrent pas l'extrémité $A \times \{0\}$ de $A \times I$. Ils sont alors saturés, leurs images dans le cône sont donc ouvertes et séparent bien les deux points.

   Si l'un des deux points, disons le deuxième, est $\overline{(x',0)}$, alors le premier est comme ci-dessus (i.e. $t \neq 0$). On choisit alors comme voisinage de $(x',0)$ l'ouvert saturé $A \times [0,\varepsilon[$ avec $\varepsilon$ assez petit pour ne pas rencontrer $U$. On conclut comme dans le point précédent par saturation.

   On raisonne de même pour $\Sigma A$.
2. Les flèches suivantes sont des quotients $A \times I \to CA \to \Sigma A$. Puisque $A$ et $I$ sont compacts, il en est de même de $A \times I$ et donc $CA$ et $\Sigma A$ sont compacts également.
3. On remarque que $I = [0,1]$ est homéomorphe à l'intervalle $[-1,1]$ et on travaille avec ce dernier, et donc un cylindre de hauteur 2 dès maintenant.

   On définit une application $S^n \times [-1,1] \to S^{n+1}$ par la formule suivante :

   $$(x_0, \cdots, x_n; t) \mapsto (x_0\sqrt{1-t^2}, \cdots, x_n\sqrt{1-t^2}, t)$$

   On vérifie que cette application passe au quotient puisque la formule donne $(0, \ldots, 0, t)$ lorsque $t = \pm 1$. Elle induit alors une application $\Sigma S^n \to S^{n+1}$. Son inverse est induit par l'application $S^{n+1} \to S^n \times I$ donnée par

   $$(y_0, \cdots, y_{n+1}) \mapsto \left( \frac{y_0}{\sqrt{1-y_{n+1}^2}}, \cdots, \frac{y_n}{\sqrt{1-y_{n+1}^2}}; y_{n+1} \right).$$

   On peut également remarquer que l'application identité $I^n \times I \to I^{n+1}$ induit une application $I^n/\partial I^n \wedge I/\partial I \to I^{n+1}/\partial I^{n+1}$ qui est un homéomorphisme.

**Exercice 3.**

1. Montrer qu'on peut obtenir l'espace $S^n$ à partir de $S^0$ en attachant successivement deux cellules de chaque dimension entre 1 et $n$.
2. Montrer que $\mathbb{RP}^n$ possède une structure cellulaire avec une seule cellule dans chaque dimension entre 0 et $n$.

**Solution 3.**

1. On procède par récurrence. Montrons que $S^n \simeq D^n \cup_{S^{n-1}} D^n$ où on recolle selon l'inclusion du bord $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$. Pour cela construit deux application continue $f_1, f_2 \ : \ D^n \to S^n$ correspondant aux deux hémisphères. On considère la paramétrisation classique de $S^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et $D^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} f_1 \ : \ D^n &\longrightarrow S^n \\ \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n, -\sqrt{1 - x_1^2 + \dots + x_n^2}) \end{aligned}$$

De même, on définit :

$$\begin{aligned} f_2 \ : \ D^n &\longrightarrow S^n \\ \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 + \dots + x_n^2}). \end{aligned}$$

Ces deux applications coincident sur le bord $S^{n-1}$, puisque les vecteurs de norme 1 sont envoyés sur $(\underline{x}, 0)$. On a donc construit une application continue $D^n \cup_{S^{n-1}} D^n \to S^n$. Elle est clairement injective (vu sa restriction aux $n$ premières coordonnées). Elle est aussi surjective : on envoie

$$(y_1, \dots, y_{n+1}) \longmapsto (y_1, \dots, y_n)$$

dans l'une des deux boules, selon que $y_{n+1}$ est positif ou négatif. Si $y_{n+1} = 0$, peu importe car les deux boules sont recollées le long du bord.

2. Les espaces projectifs réels $\mathbb{RP}^n$ peuvent être construits comme quotient de $S^n$ par l'action antipodale. On observe que l'action antipodale échange les deux cellules dans chaque dimension.

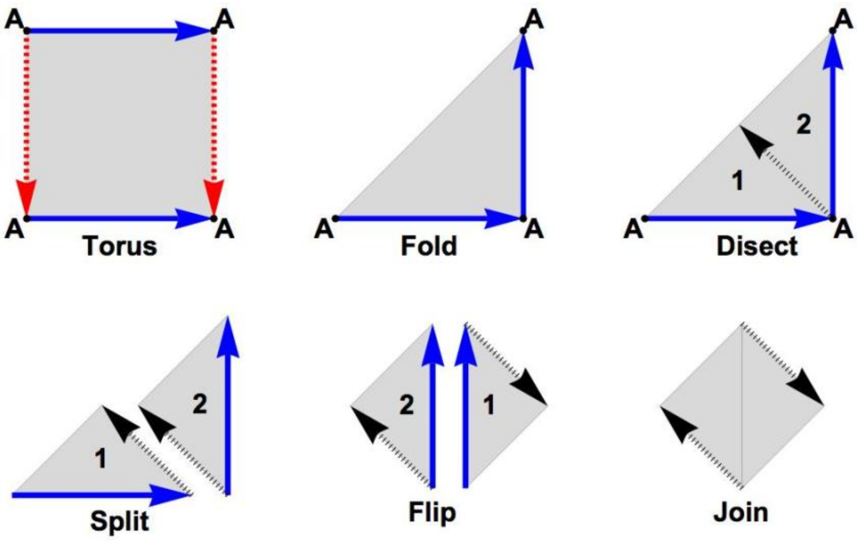
**Exercice 4.** Soit $X$ un espace et $Sym^2(X)$ le *produit symétrique*, défini comme étant le quotient de $X \times X$ sous l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui échange les facteurs.

1. Identifier $Sym^2(I)$ où $I = [0, 1]$ à homéomorphisme près.
2. Montrer que $Sym^2(S^1)$ est homéomorphe à un ruban de Möbius.

**Solution 4.**

1. On a $Sym^2(I) = I \times I/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On identifie $(a, b)$ avec $(b, a)$ pour tous $a, b \in I$. Le quotient est un triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$.

2. On reprend la preuve de 3Blue1Brown.




Puisque $S^1$ est homéomorphe à $I/\{0,1\}$, on a $S^1 \times S^1 \approx I \times I/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation produit $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ si et seulement si $a \sim c$ et $b \sim d$. Le quotient de ce quotient $Sym^2(S^1) = S^1 \times S^1/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est donc homéomorphe au quotient de $Sym^2(I)$ par la relation $\overline{\mathcal{R}}$ induite par $\mathcal{R}$.

Explicitement il s'agit du quotient du triangle $T$ de la partie (1), de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$, quotienté par $(x,0)\overline{\mathcal{R}}(1,x)$ pour tout $0 \leq x \leq 1$.

On considère maintenant le carré $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1-x \leq y \leq x \text{ et } x-1 \leq y \leq 2-x\}$. Il a été obtenu en gardant la moitié du triangle précédent (justement la partie du triangle intersectant $C$, à gauche de la droite $x=1$) en déplaçant l'autre moitié du triangle à droite de la droite $x=1$. C'est la partie "Dissect-Split-Flip" de l'illustration ci-dessus :

La formule de cette transformation $f\colon T \to C$ est donnée par

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} (x,y) & \text{si } \; y \geq 1-x \\ (y+1,x) & \text{si } \; y < 1-x \end{cases}$$

Attention, cette application n'est pas continue !

Soit $\mathcal{S}$ la relation d'équivalence définie sur $C$ par $(x,1-x)\mathcal{S}(2-x,x)$ pour $1/2 \leq x \leq 1$ et $q\colon C \to C/\mathcal{S} = M$ l'application quotient. Alors $q \circ f$ est continue. La justification de la continuité se fait en analysant les préimages des ouverts et seuls les voisinages de points qui se trouvent sur les traits bleus ou les traitillés noirs posent problème. En fait la préimage d'un petit disque ouvert de $C$ centré sur la droite $x=1$ est la réunion disjointe de deux demi-disques ouverts centrés sur le bord du triangle $T$, c'est un ouvert. Enfin un petit voisinage ouvert d'un point sur le traitillé correspond via $q^{-1}$ à deux demi-disques ouverts centrés sur les deux traitillés (image "Join") dont la préimage par $f$ est un disque ouvert centré sur la hauteur du triangle $T$.

Comme $q \circ f$ est compatible avec la relation $\overline{\mathcal{R}}$, elle passe au quotient pour induire une application $\bar{f}\colon Sym^2(S^1) \to C/\mathcal{S}$. Cette application est un homéomorphisme et on conclut par le fait que le quotient du carré est homéomorphe au ruban de Möbius, voir Série 2.

**Exercice 5*.** On rappelle que $\mathbb{C}P^n$ est le quotient de $S^{2n+1}$, la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}_n$ définie par l'action du groupe $S^1$ par multiplication sur les coordonnées. On note $q_n\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ l'application quotient. On note encore $\iota_n\colon S^{2n-1} \hookrightarrow S^{2n+1}$ l'inclusion donnée par $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_n, 0)$.

1. Soit $D^{2n}$ la boule unité dans $\mathbb{C}^n$. Montrer que la formule

$$f(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_n, \sqrt{1 - |z_1|^2 - \cdots - |z_n|^2})$$

   définit une application $f\colon D^{2n} \to S^{2n+1}$.
2. Montrer que $q_n \circ f$ est surjective.
3. On définit une relation d'équivalence sur $D^{2n}$ en posant $\mathbf{z} \sim \mathbf{z}'$ si et seulement $\mathbf{z} = \mathbf{z}'$ ou $\mathbf{z}\mathcal{R}_{n-1}\mathbf{z}'$ pour des éléments $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in S^{2n-1}$. Montrer que $q_n \circ f$ passe au quotient (et induit une application $g$).
4. Montrer que $g$ est un homéomorphisme et que la restriction de $q_n \circ f$ à l'intérieur de $D^{2n}$ est un homéomorphisme.
5. Montrer que la restriction de $f$ au bord $S^{2n-1}$ est l'inclusion $\iota_n$ et qu'elle induit une application injective $\mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$.
6. Conclure que $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^{n-1} \cup_{q_{n-1}} D^{2n}$.

**Solution 5*.**

1. On calcule la norme $|z_1|^2 - \cdots - |z_n|^2 + (1 - |z_1|^2 - \cdots - |z_n|^2) = 1$.
2. Un point $[\mathbf{z}]$ de $\mathbb{C}P^n$ a pour préimage par $q_n$ dans $S^{2n+1}$ une orbite pour $S^1$. Prenons une préimage $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ de $[z]$ par $q_n$.
   Les éléments de la forme $(z_1, \ldots, z_n, \sqrt{1 - |z_1|^2 - \cdots - |z_n|^2})$ de $S^{2n+1}$ sont tous ceux dont la dernière coordonnée est réelle, positive ou nulle.
   Si $z_{n+1} \neq 0$, il existe un unique $b \in S^1$ tel que $bz_{n+1}$ est réel et positif, à savoir $b = \bar{z}_{n+1}/|z_{n+1}|$. Ainsi, $[\mathbf{z}] = (q_n \circ f)(bz_1, \ldots, bz_n)$. Si $z_{n+1} = 0$, alors $[z] = [(q_n \circ f)(az_1, \ldots, az_n)]$ pour tout $a \in S^1$. Ainsi $q_n \circ f$ est surjective.
3. On vérifie simplement pour $\mathbf{z}' = a \cdot \mathbf{z}$ avec $a \in S^1$ et $\mathbf{z} \in S^{2n-1}$ que

$$\begin{aligned}(q_n \circ f)(\mathbf{z}') = q_n(az_1, \ldots, az_n, \sqrt{1 - |az_1|^2 - \cdots - |az_n|^2}) &= q_n(az_1, \ldots, az_n, 0) \\ &= q_n(z_1, \ldots, z_n, 0) = (q_n \circ f)(\mathbf{z})\end{aligned}$$

   Ainsi $q_n \circ f$ passe au quotient et induit une application $g\colon D^{2n}/\sim \longrightarrow \mathbb{C}P^n$.
4. Au point 2, on avait un unique antécédent de $q_n \circ f$ si $z_{n+1}$ est non nul. Si $z_{n+1}$ est nul, toutes ses préimages sont de la forme $az_1, \ldots, az_n$ pour $a$ dans $S^1$ donc $[z]$ est l'image d'une unique classe de $D^{2n}/\sim$. Comme $g$ est une bijection de source compacte vers un but séparé, c'est un homéomorphisme.
5. Le bord de $D^{2n}$ est la sphère $S^{2n-1}$ dont les éléments sont des $n$-uplets de nombres complexes $(z_1, \ldots z_n)$ avec $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1$. Alors $f(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_n, 0)$. C'est $\iota_n$. Comme vu ci-dessus la restriction aussi passe au quotient et induit une application injective $\mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$.

6. En résumé nous avons une inclusion $\mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ et le complément $\mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$ est l'image homéomorphique par $g$ de l'intérieur de la boule $D^{2n}$, dont le bord $S^{2n-1}$ est envoyé par l'application quotient $q_{n-1}$ sur $\mathbb{C}P^{n-1}$. Autrement dit, le push-out du diagramme suivant

$$\mathbb{C}P^{n-1} \leftarrow S^{2n-1} \hookrightarrow D^{2n}$$

est précisément $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^{n-1} \cup_{q_{n-1}} D^{2n}$.