**Exercice 1.** (a) Soit $R$ le rectangle $I \times I$ et $\sim$ la relation d'équivalence définie par $(s,t) \sim (s',t')$ si et seulement si $(s,t) = (s',t')$ ou $s = 0, s' = 1$ et $t = t'$. Montrer que l'espace quotient est un cylindre.
(b) Soit $R$ le rectangle $I \times I$ et $\sim$ la relation d'équivalence définie par $(s,t) \sim (s',t')$ si et seulement si $(s,t) = (s',t')$ ou $s = 0, s' = 1$ et $t = 1-t'$. Montrer que l'espace quotient est un ruban de Möbius.

**Solution 1.**
(a) On choisit la paramétrisation du cylindre $C$ donnée par un angle $\alpha$ compris entre 0 et $2\pi$ et une hauteur comprise entre 0 et 1. On définit une application $f: R \to C$ en envoyant $(s,t)$ sur $(2\pi s, t)$, plus précisément sur le point $(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t) \in \mathbb{R}^3$. Cette application est continue et surjective. De plus elle est compatible avec la relation d'équivalence puisque cosinus et sinus sont $2\pi-$periodiques. Elle passe donc au quotient et induit une application $\bar{f}: R/\sim \longrightarrow C$. Cette application est une bijection d'un espace compact, car quotient d'un compact, vers un espace séparé, c'est un homéomorphisme.
(b) Comme ci-dessus on choisit une paramétrisation du ruban de Möbius dans $\mathbb{R}^3$. Son âme (le cercle central) se trouve sur un cercle de rayon 2 dans le plan $Oxy$, centré en l'origine. Un point de ce cercle est donné par un angle $\alpha$. Par chacun de ces points passe un segment de longueur 1, le coupant en son milieu. Ce segment fait un angle $\beta$ avec la verticale et on indique finalement la position $h$ sur ce segment orienté, comprise entre 0 et 1.
On définit une fonction sur $R$ en associant les angles $\alpha(s,t) = 2\pi s$, $\beta(s,t) = \pi s$ et $h(s,t) = t$. Cette fonction est surjective et passe au quotient puisque $\alpha(0,t) = 0 \equiv 2\pi = \alpha(1,t)$. Les angles $\beta(0,t) = 0$ et $\beta(1,t) = \pi$ indiquent qu'en $s = 0$, le segment est vertical orienté de bas en haut, et qu'en $s = 1$ il est vertical également mais orienté de haut en bas. Les points $(0,t)$ et $(1, 1-t)$ sont donc envoyés sur le même point de $\mathbb{R}^3$. La fonction passe au quotient et on conclut comme en (a).

**Exercice 2.** Soit $\sim$ la relation d'équivalence définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si et seulement si $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2$. Soit $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ l'application quotient.

1. Montrer que $q^{-1}(q(\mathbf{0}))$ n'est pas compact.
2. Montrer que l'espace quotient $\mathbb{R}^2/\sim$ est homéomorphe à un quotient de $I \times I$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^2/\sim$ est homéomorphe au tore $S^1 \times S^1$.

**Solution 2.**

1. Cette préimage est $\mathbb{Z}^2$, qui n'est pas compact.
2. On considère $I \times I$ comme un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ et on constate que tout point $(x,y)$ du plan est équivalent à un point de ce carré, à savoir $(x - \lfloor x \rfloor, y - \lfloor y \rfloor)$, où $\lfloor - \rfloor$ est la partie entière (inférieure). La même relation $\sim$ restreinte à $I \times I$ définit donc une application quotient restreinte $p: I \times I \to Y$. Pour montrer que $Y$ et $\mathbb{R}^2/\sim$ sont homéomorphes, on utilise que l'application $(x,y) \longmapsto (x - \lfloor x \rfloor, y - \lfloor y \rfloor)$ induit une bijection $\mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow Y$ continue, dont l'inverse est induite par l'inclusion $I \times I \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, qui est continue.
3. On utilise le point précédent. Les points de l'intérieur du carré ne sont en relation qu'avec eux-mêmes, alors que ceux du bord vérifient en plus $(0,t) \sim (1,t)$ et $(s,0) \sim (s,1)$. En particulier

$(0,0) \sim (0,1) \sim (1,1) \sim (1,0)$. Pour montrer que le quotient est un tore, nous utilisons le fait que ce quotient peut être vu comme un quotient de quotient. On identifie d'abord les segments verticaux du carré, comme dans l'Exercice 1 (a), et on obtient un cylindre, puis il reste à identifier les segments verticaux du carré original, c'est-à -dire les cercles $0 \times S^1$ et $1 \times S^1$, bases de ce cylindre. L'homéomorphisme consiste à envoyer le cercle situé à la hauteur $s$ de ce cylindre sur le cercle de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$, centré en $(2\cos(2\pi s), 2\sin(2\pi s), 0)$ et se trouvant dans le plan vertical passant par l'origine. On choisit par exemple de faire correspondre $(s, 0)$ au point $(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)$ pour faire correspondre ce segment $I \times 0$ à l'équateur intérieur du tore et le segment $I \times \{\frac{1}{2}\}$ à l'équateur extérieur du tore.

**Exercice 3.** Montrer que $S^3$ est un groupe topologique en construisant un homéomorphisme vers $SU(2)$, le groupe des matrices unitaires $2 \times 2$ de déterminant 1.

**Solution 3.** La sphère $S^3$ est le sous espace de $\mathbb{R}^4$ formé des vecteurs $(a, b, c, d)$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Le groupe SU(2) est composé des matrices $\left(\begin{smallmatrix} z & w \\ w' & z' \end{smallmatrix}\right)$ avec $z, z', w, w' \in \mathbb{C}$, $w' = -\overline{w}$, $z' = \overline{z}$ et $zz' - ww' = 1$. Il s'agit d'un groupe topologique, sa topologie étant induite par celle de $\mathbb{C}^4 \cong \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ dont c'est un sous espace. La loi de groupe est la multiplication des matrices.

On définit une application $\mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ par la formule

$$(a, b, c, d) \mapsto \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}.$$

On vérifie que cette application est continue et que sa restriction à $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ est à valeurs dans $SU(2)$. On a donc bien défini une application $S^3 \to SU(2)$. Elle admet un inverse donné par

$$\begin{pmatrix} z & w \\ w' & z' \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{z + z'}{2}, \frac{z - z'}{2i}, \frac{w - w'}{2}, \frac{w + w'}{2i}\right).$$

Cet inverse est continu et donc un homéomorphisme $SU(2) \approx S^3$.

**Exercice 4.** Soit $X = \{-1, 0, 1\}$ et on note $X_d$ cet ensemble muni de la topologie discrète, $X_g$ ce même ensemble muni de la topologie grossière (les seuls ouverts sont $\emptyset$ et $X$) et $X_q$ muni de la topologie quotient de l'Exercice 4 de la Série 1.

1. Dire quels espaces sont séparés et déterminer les relations de finesse entre ces topologies.
2. Déterminer pour quelles paires $(i, j)$ l'identité sur $X$ détermine une application continue $X_i \to X_j$ pour $i, j \in \{d, g, q\}$.

**Solution 4.**

1. La topologie grossière est moins fine que les autres puisque $\emptyset$ et $X$ sont des ouverts par définition dans toute topologie. La topologie discrète est plus fine que toutes les autres puisque par définition tout sous-ensemble de $X$ est ouvert dans $X_d$. La topologie de $X_q$ est strictement plus fine que $X_g$ puisque $\{1\}$ est ouvert dans $X_q$, mais strictement moins fine que $X_d$ puisque $\{0\}$ n'est pas ouvert dans $X_q$.
2. On a des application continues d'une topologie plus fine vers une topologie moins fine, ainsi $X_d \to X_q$, ainsi que $X_q \to X_g$ et la composition sont continues. Toute autre application donnée par $x \mapsto x$ n'est pas continue pour la raison décrite ci-dessus.

**Exercice 5.** Démontrer la proposition suivante du cours :
**Proposition :** Soit $q : X \to Y$ continue et surjective. Alors $q$ est un quotient si et seulement si pour tout ouvert saturé $U \subset X$, $q(U) \subset Y$ est ouvert.

**Solution 5.** "$\Rightarrow$". Si $q$ est un quotient et $U$ un ouvert saturé de $X$, alors $B = q(U)$ est tel que $q^{-1}(B) = q^{-1}(q(U)) = U$ car $U$ est saturé, en particulier $B$ est ouvert de la topologie quotient sur $Y$.
"$\Leftarrow$". Supposons que pour tout ouvert saturé $U \subset X$, $q(U) \subset Y$ est ouvert. Prenons un sous-ensemble $A$ de $Y$ tel que $q^{-1}(A)$ est ouvert. Montrons que $A$ est ouvert. Puisque $q(q^{-1}(A)) = A$, grâce à l'hypothèse, il suffit de montrer que $q^{-1}(A)$ est saturé, et c'est le cas car $q^{-1}(q(q^{-1}(A))) = q^{-1}(A)$.

**Exercice 6*.**
Soit $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C}P^1$ le quotient sous l'action de $S^1 \subset \mathbb{C}$. On identifie donc $(z, z') \in S^3$ avec $(az, az')$ pour tout nombre complexe de norme 1, où $z, z'$ sont les coordonnées complexes d'un point de $S^3$. Soit $q \colon S^3 \to \mathbb{C}P^1$ l'application quotient.

1. Montrer que la préimage de tout point de $\mathbb{C}P^1$ est un cercle dans $S^3$.
2. Montrer que l'application $(z, z') \mapsto (|z|^2 - |z'|^2, 2z\bar{z}')$ de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ définit une application $\eta \colon S^3 \to S^2$.
3. Montrer que $\eta$ est surjective et que la préimage de chaque point est un cercle.
4. Montrer que la préimage de l'équateur $0 \times S^1 \subset S^2$ est un tore.
5. Montrer que $\mathbb{C}P^1$ est homéomorphe à la sphère $S^2$.

**Solution 6*.**

1. Fixons $(z, z')$ dans $S^3$. L'application $S^1 \to S^3$ définie par multiplication par $a \mapsto (az, az')$ est injective et continue, c'est l'inclusion de la préimage de la classe $[z, z'] \in \mathbb{C}P^1$ dans $S^3$.
2. La norme, l'élévation au carré, la différence, la conjugaison complexe et la multplication sont toutes continues, si bien que cette application est continue. Prenons $(z, z')$ dans $S^3$ et calculons :
$$(|z|^2 - |z'|^2)^2 + 2z\bar{z}' \cdot \overline{2z\bar{z}'} = |z|^4 - 2|z|^2|z'|^2 + |z'|^4 + 4|z|^2|z'|^2 = (|z|^2 + |z'|^2)^2 = 1$$
Ceci définit donc bien une application $\eta \colon S^3 \to S^2$.
3. Soit $(x, \omega)$ un point de $S^2$, i.e. $x^2 + \omega\bar{\omega} = 1$, ou encore $|\omega|^2 = 1 - x^2$. On peut donc écrire $\omega = \sqrt{1 - x^2}e^{i\varphi}$. On cherche à résoudre le système d'équations, pour $(z, z') \in S^3$, donné par
$$|z|^2 - |z'|^2 = x \text{ et } 2z\bar{z}' = \omega$$
Alors $|z|^2 = \dfrac{1 + x}{2} = r$ et $|z'|^2 = \dfrac{1 - x}{2} = s$, si bien que $z = \sqrt{r}e^{i\alpha}$ et $z' = \sqrt{s}e^{i\beta}$. Enfin $2z\bar{z}' = 2\sqrt{rs}e^{i(\alpha-\beta)}$ doit être égal à $\omega$ dont la norme vaut bien $2\sqrt{rs} = \sqrt{1 - x^2}$ si bien que le système est compatible. Ainsi les solutions sont toutes de la forme suivante, où $a$ est un nombre complexe de norme 1 :
$$\boxed{z = \left(\frac{1 + x}{2}\right)^{1/2} \cdot ae^{i\varphi}, \ z' = \left(\frac{1 - x}{2}\right)^{1/2} a}$$

Ceci définit clairement un espace homéomorphe à un cercle, il en fait même isométrique à un cercle. On peut en effet multiplier par la matrice unitaire $\begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour transformer isométriquement la préimage décrite ci-dessus en l'ensemble de tous les points de la forme $(\sqrt{r} \cdot a, \sqrt{s} \cdot a)$ avec $a = e^{it}$ un nombre complexe de module 1. Ces points se trouvent sur la sphère unité $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ et sur le plan d'équation $\sqrt{s} \cdot z = \sqrt{r} \cdot z'$. L'intersection d'une sphère avec un plan passant par l'origine est un cercle de rayon 1.

4. Lorsque la première coordonnée de $\eta(z, z')$ est nulle, $|z| = |z'|$ et la préimage correspond aux points de $S^3$ de la forme $(z, z')$ avec $|z| = \sqrt{2}/2 = |z'|$. C'est un tore, i.e. homéomorphe à $S^1 \times S^1$ (l'équateur forme une copie de $S^1$ et chaque préimage est un cercle de rayon $\sqrt{2}/2$).

5. L'application $\eta$ passe au quotient car la norme ne change pas lorsqu'on multiplie un nombre complexe par un nombre complexe $a$ de norme 1 et de même $az \cdot \overline{az'} = a\bar{a} \cdot z\bar{z}' = 1 \cdot z\bar{z}' = z\bar{z}'$. On obtient ainsi une application $\bar{\eta}\colon \mathbb{C}P^1 \to S^2$ d'un compact vers un espace séparé. Il suffit donc de voir que c'est une bijection pour conclure.

   La surjectivité est claire par surjectivité de $\eta$, voir le point 3. L'injectivité suit de l'identification des cercles préimages dans ce même point.