EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Corrigé 1
Topologie II

Exercice 1. Soit X un espace et $q\colon X \to Y$ une surjection. Pour montrer que les ouverts de la topologie quotient forment bien une topologie, on vérifie simplement les axiomes. D'abord l'ensemble vide et Y sont ouverts puisque les préimages sont respectivement $\emptyset$ et X qui sont ouverts dans X. Pour l'axiome d'intersection finie il suffit de considérer deux ouverts U et V de Y, les autres cas se montrent par récurrence. Comme $q^{-1}(U \cap V) = q^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ est un ouvert de X, $U \cap V$ est un ouvert de la topologie quotient de Y.
Enfin si U_α est une famille quelconque d'ouverts de Y pour $\alpha \in A$, on a $q^{-1}(\cup U_\alpha) = \cup q^{-1}(U_\alpha)$ et on conclut par le fait que les ouverts de X vérifient l'axiome de l'union.

Exercice 2. Soit H la figure huit dans le plan donnée par deux cercles tangents, en coordonnées

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}$$

On définit une fonction $q\colon [-1, 1] \to H$ en posant

$$q(t) = \begin{cases} -1 + e^{2\pi i t} & \text{si } \ -1 \leq t \leq 0 \\ 1 + e^{2\pi i(t-1/2)} & \text{si } \ 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

On peut utiliser les coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ pour montrer que q est surjective.
Pour montrer que q est continue, on doit considérer deux types d'ouverts, des bases de voisinages d'un point différent de $(0, 0)$ et ceux de l'origine. Pour un point $\mathbf{x}$ différent de l'origine, il existe une base de voisinages donnée par des boules $B(\mathbf{x}, \epsilon)$ de $\mathbb{R}^2$ dont l'intersection avec H est telle que la préimage par q est un intervalle ouvert de $[-1, 1]$.
Pour l'origine l'intersection $B(\mathbf{0}, \epsilon) \cap H$ forme une figure de X dont la préimage par q est constituée de $[-1, -1+\delta) \cup (-\delta, \delta) \cup (1-\delta, 1]$, qui est bien un ouvert de l'intervalle (pour la topologie induite de $\mathbb{R}$).
Il faut encore montrer que q est un quotient, c'est-à-dire que la topologie métrique de H est la plus fine rendant q continue. Comme ci-dessus le cas des voisinages d'un point différent de l'origine est facile, concentrons-nous en $(0, 0)$. Soit U un ouvert de la topologie quotient contenant $(0, 0)$. Alors $q^{-1}(U)$ contient -1, 0 et 1, et comme c'est un ouvert de $[-1, 1]$ il contient aussi un ouvert de la forme $[-1, -1+\delta) \cup (-\delta, \delta) \cup (1-\delta, 1]$. Ainsi U contient $q(q^{-1}(U))$ qui est une figure en forme de X ouverte dans la topologie métrique. Ceci montre que la topologie métrique est plus fine que la topologie, donc qu'elles coïncident.
Par contre q n'est pas une application ouverte puisque l'ouvert $(-1/2, 1/2)$ a pour image par q un sous-ensemble de H qui n'est pas ouvert, ne contenant aucun voisinage de $(0, 0)$ dans H.
On aurait pu faire des calculs explicites et c'est un bon exercice de le faire une fois si les arguments ci-dessus vous paraissent trop peu rigoureux.

Exercice 3. Soit $X = [0, 1]$ et $\sim$ une relation d'équivalence. On demande de décrire ou même seulement de dessiner l'espace quotient dans les cas suivants :

1. $x \sim y$ si et seulement si $x = y$ ou $\{x, y\} \subset \{0, 1\}$. On identifie seulement les extrémités de $[0, 1]$ et on obtient un cercle. L'application exponentielle permettrait de le vérifier explicitement.
2. $x \sim y$ si et seulement si $x = y$ ou $\{x, y\} \subset \{0, 1/2\}$. On obtient $\flat$.

3. $x \sim y$ si et seulement si $x = y$ ou $\{x, y\} \subset \{0, 1/2, 1\}$. On obtient la figure huit de l'exercice ci-dessus.
4. On obtient un point.

Exercice 4. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation d'équivalence $\sim$ par $x \sim y$ si et seulement si $x = y = 0$ ou $xy > 0$.
L'espace quotient Y ne contient alors que trois points : la classe $\bar{0}$, celle des nombres positifs $\bar{1}$ puisque $1 \sim x$ pour tout $x > 0$ par définition et celle des nombres négatifs $\overline{-1}$. Les singletons $\{\bar{1}\}$ et $\{\overline{-1}\}$ sont des ouverts par définition de la topologie quotient car les préimages sont respectivement $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Par contre tout voisinage ouvert de $\bar{0}$ contient à la fois $\bar{1}$ et $\overline{-1}$ car la préimage doit contenir un nombre positif et un nombre négatif. La liste complète des ouverts est donc

$$\emptyset, \{\bar{1}\}, \{\overline{-1}\}, \{\bar{1}, \overline{-1}\}, Y$$

Cet espace n'est pas séparé car on ne peut séparer $\bar{0}$ des autres points par des ouverts. Par contre il est compact, étant l'image de $[-1, 1]$, un compact, par une application continue.

Exercice 5. a) On commence par le cas de $D^1 = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ avec le sous-espace $A = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On définit $f : D^1 \to D^1$ par la formule

$$t \mapsto \begin{cases} 2t - 1 \ si \ t \geq 1/2 \\ 0 \ si \ -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 2t + 1 \ si \ t \leq -1/2 \end{cases}$$

On définit ainsi une application continue (facilement vérifié) qui envoie le sous-espace A sur le point $0 \in D^1$: on a $f(t) = 0$ pour tout $t \in A$. Par la propriété universelle du quotient f induit une application continue $\bar{f} : D^1/A \to D^1$. On vérifie facilement que $\bar{f}$ est bijective. Par ailleurs, puisque D^1 est un espace compact, le quotient D^1/A l'est également et en particulier un espace séparé. Donc $\bar{f}$ est un homéomorphisme $D^1/A \cong D^1$.

On raisonne de même pour le disque $D^2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ avec $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1/4\}$. On peut représenter les éléments de $D^2 \setminus (0, 0)$ en coordonnées polaires (r, θ) avec $0 < r \leq 1$. On définit une fonction continue $f : D^2 \to D^2$ par la formule

$$(r, \theta) \mapsto (\max(0; 2r - 1), \theta).$$

Comme précedemment $f(A) = (0, 0)$ donc f passe au quotient et induit $\bar{f} : D^2/A \to D^2$. $\bar{f}$ est bijective et puisque D^2 et D^2/A sont compacts, c'est un homéomorphisme $D^2/A \cong D^2$.

(b) On choisit par exemple le sous-espace C de $\mathbb{R}^3$ formé des points $(s \cdot \cos t; s \cdot \sin t; s)$, pour $0 \leq s \leq 1$ et $0 \leq t \leq 2\pi$ (Il s'agit d'une paramétrisation du cône de révolution d'axe Oz d'un segment d'extrêmités $(0; 0; 0)$ et $(0; 1; 1)$).

On définit maintenant une application $f \colon S^1 \times I \to C$ par $f(\cos t; \sin t; s) = (s \cdot \cos t; s \cdot \sin t; s)$. On observe que cette application passe au quotient et définit $\bar{f} \colon CS^1 \to C$ puisque tous les points du “couvercle” $S^1 \times 0$ ont la même image par f. Une vérification facile montre que $\bar{f}$ est une bijection (continue). Comme la source est le quotient d'un espace compact, donc compact, vers un espace de Hausdorff C, c'est un homéomorphisme.

Pour identifier C avec D^2, on choisit de projeter C sur le plan Oxy via $g\colon C \to D^2$, où

$$g(s \cdot \cos t; s \cdot \sin t; s) = (s \cdot \cos t; s \cdot \sin t).$$

C'est à nouveau une application bijective d'un espace compact (C est fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$) vers l'espace Hausdorff D^2, donc un homéomorphisme.

Exercice 6. Soit $X = \bigvee_1^\infty S^1$ le wedge d'un nombre dénombrable de copies de cercles et Y les anneaux Hawaïens :

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2\}$$

1. L'espace Y est compact, étant fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$. Par contre X n'est pas compact. Appelons $*$ le point de base commun à tous les cercles. On peut par exemple exhiber un recouvrement ouvert dont on ne peut extraire un sous-recouvrement fini. Il suffit pour cela de choisir U_0 comme étant un (petit) voisinage de $*$ (pour être plus explicite disons qu'il est constitué de la réunion de demi-cercles ouverts centrés en leur point de base) et pour tout $n \geq 1$ on définit U_n comme étant le n-ème cercle privé de son point de base. Ce sont des ouverts de la topologie quotient puisque les préimages dans la réunion disjointe sont ouvertes.
   Attention. Un seul demi-cercle contenant le point de base n'est pas ouvert dans le wedge puisque la préimage dans la réunion disjointe est constituée d'un demi-cercle ouvert dans un seul des cercles, **et également** de tous les points de base dans les autres cercles. Ce n'est pas un ouvert.

   On peut aussi voir que Y est la compactification d'une réunion disjointe dénombrable d'intervalles ouverts...
2. Une base d'ouverts de X est donnée par tous les arcs de cercles ouverts ne contenant pas $*$ contenus dans un seul des cercles, ainsi que des réunions $\cup U_n$ où U_n est un arc de cercle ouvert du n-ème cercle contenant $*$. Pour Y la situation est la même pour les ouverts ne contenant pas $(0, 0)$, mais la base de voisinage de l'origine est constituée des intersections de Y avec les boules $B(\mathbf{0}, \epsilon)$, il s'agit donc d'une réunion $\bigcup_{i=1}^n U_i$ finie d'arcs de cercles ouverts U_i centrés en $(0, 0)$ et contenus dans le cercle de rayon $1/i$, à laquelle on ajoute tous les autres cercles de rayon $< 1/n$.
3. Clairement X et Y ne sont pas homéomorphes, l'un étant compact et l'autre pas. Il existe cependant une application continue $X \to Y$ qui est bijective. Pour cela on définit d'abord une application continue de l'union disjointe des cercles vers Y qui envoie le $n-$ième cercle sur le cercle de rayon $1/n$, en envoyant le point base sur $(0, 0)$. Comme le wedge est un quotient, et que l'image de tous les points bases est un unique point, cette application passe au quotient et donne une bijection continue $X \to Y$.

Remarque. Comme le wedge infini de cercles n'est pas compact, il est impossible de le représenter comme un sous-espace borné et fermé de $\mathbb{R}^n$. Par contre il existe une représentation comme sous-espace borné, mais non fermé, de $\mathbb{R}^3$: on place une infinité de cercles de rayon un dont les centres se trouve dans Oxy à distance un de l'origine. Le n^e cercle du wedge se trouve dans le plan vertical contenant la droite horizontale $y = nx$ dans Oxy si bien que le cercle limite se trouvant dans le plan Oyz ne fait pas partie de cet espace.