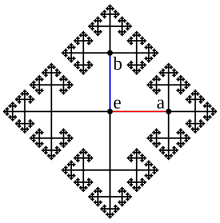
EPFL – Semestre de Printemps 2024–2025
Topologie II **Solution 12**

Exercice 1.
Trouver les revêtements universels des espaces suivants.

1. Le cercle S^1
2. Le bouquet de deux cercles $S^1 \vee S^1$
3. Le tore $S^1 \times S^1$
4. Les espaces projectifs réels $\mathbb{RP}^n$

Solution 1.

1. On connait le revêtement $\mathbb{R} \to S^1$ donné par l'exponentielle, et $\mathbb{R}$ est simplement connexe.
2. Il s'agit du graphe de Cayley, un graphe $2-$orienté infini et simplement connexe.



3. On a vu que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq T$, l'application quotient $\mathbb{R}^2 \to T$ est un revêtement, et $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe.
4. De même pour $n \geq 2$, l'application quotient par action d'antipodie $S^n \to \mathbb{RP}^n$ est le revêtement universel, puisque S^n est simplement connexe. Pour $n = 1$, on a $\mathbb{RP}^1 \simeq S^1$, donc le revêtement universel est $\mathbb{R}$ par 1.

Exercice 2.
Soient X, Y, Z des espaces topologiques.

1. Supposons qu'on a des applications $X \to Y \to Z$ telles que $Y \to Z$ et $X \to Z$ sont des revêtements. Montrer que si Z est localement connexe par arcs, $X \to Y$ est un revêtement.
2. Pour deux sous-groupes $H_1 \leq H_2 \leq \pi_1(X)$, montrer qu'on a un revêtement $X_{H_1} \to X_{H_2}$.

Solution 2.

1. Montrons d'abord que pour chaque $y \in Y$ il existe un voisinage ouvert $U_y \subset Y$ tel que

$$p^{-1}(U_y) \;=\; \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha,$$

où les V_α sont des *feuillets* sur U_y, et chaque restriction

$$p|_{V_\alpha} \colon V_\alpha \xrightarrow{\sim} U_y$$

est un homéomorphisme.

Choisissons un point $y \in Y$ et un voisinage connexe trivialisant $W \subset Z$ de $q(y)$ tel que

$$q^{-1}(W) \;=\; \bigsqcup_{\beta \in B} U_\beta, \quad (q \circ p)^{-1}(W) \;=\; \bigsqcup_{\gamma \in C} V_\gamma,$$

et pour chaque β, γ les applications

$$q|_{U_\beta} : U_\beta \to W \quad \text{et} \quad (q \circ p)|_{V_\gamma} : V_\gamma \to W$$

sont des homéomorphismes. Soit β_0 l'unique indice tel que $y \in U_{\beta_0}$, et posons

$$U_y := U_{\beta_0}.$$

Alors

$$p^{-1}(U_y) \;\subset\; (q \circ p)^{-1}(W) \;=\; \bigsqcup_{\gamma \in C} V_\gamma.$$

Nous voulons montrer que

$$p^{-1}(U_y) \;=\; \bigsqcup_{\gamma \in C'} V_\gamma \quad \text{pour un certain } C' \subset C.$$

Comme W est connexe, chaque V_γ est connexe et ne peut rencontrer deux fibres distinctes $p^{-1}(U_\beta)$ sans contredire la connexité.
Les V_γ sont par définition les composantes connexes de $(q \circ p)^{-1}(W)$. Si un V_γ rencontrait deux fibres, alors il se décomposerait en deux ouverts disjoints non-vides, contradiction.
Par conséquent chaque V_γ est entièrement contenu dans un unique $p^{-1}(U_\beta)$, et l'on peut écrire

$$p^{-1}(U_y) \;=\; \bigsqcup_{\gamma \in C(\beta_0)} V_\gamma.$$

Enfin, comme

$$(q \circ p)|_{V_\gamma} = q|_{U_y} \,\circ\, p|_{V_\gamma} \quad \text{est un homéomorphisme,}$$

on voit que $p|_{V_\gamma}$ est lui-même un homéomorphisme de V_γ sur U_y.

Ainsi p satisfait la définition d'un revêtement.

2. Notons que $[\gamma] \sim_{H_1} [\gamma'] \Rightarrow [\gamma] \sim_{H_2} [\gamma']$. Ainsi, la relation $\sim_{H_2}$ est bien définie sur X_{H_1}, donc l'application $X_{H_1} \to X$ se factorise par l'application quotient $X_{H_1} \to X_{H_2}$, donnant une composition $X_{H_1} \to X_{H_2} \to X$ avec X localement connexe par arcs et tel que $X_{H_2} \to X$ et $X_{H_1} \to X$ sont des revêtements. Par la question 1, l'application quotient $X_{H_1} \to X_{H_2}$ est un revêtement.

Exercice 3. Trouver tous les revêtements connexes à 2 et 3 feuillets de $S^1 \vee S^1$, à isomorphismes (non pointés) de revêtements près.

Solution 3. Le bouquet de deux cercles $X = S^1 \vee S^1$ est connexem localement connexe par arcs et localement contractile (donc SLSC), de groupe fondamental F_2, le groupe libre de générateurs a, b. Par le théorème de classification des revêtements, l'ensemble des des classes d'isomorphismes de revêtements connexes à n feuillets est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes d'indice n de F_2. Pour $n = 2$, rappelons que tout sous-groupe d'indice 2 est normal. Les sous-groupes normaux d'indice n de F_2 sont les noyaux des morphismes surjectifs vers les groups d'ordre n. Par la propriété universelle des groupes libres, si G est un groupe, g_1, g_2 des éléments de G, il existe un unique morphisme de groupe $f\colon F_2 \to G$ tel que $f(a) = g_1$ et $f(b) = g_2$. De plus f est surjective si et seulement si $\{g_1, g_2\}$ engendre G. Il existe en particulier $Card(G)^2$ morphismes de F_2 vers G si G est fini. A isomorphisme près, le seul groupe d'ordre 2 est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et le seul groupe d'ordre 3 est $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Une partie finie de l'un de ces deux groupes l'engendre si et seulement si elle n'est pas réduite à l'élément neutre. Deux morphismes non nuls distincts dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ont des noyaux distincts, et deux morphismes non nuls dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ si et seulement si $f(b) = 2f(a)$. Donc il y a exactement $2^2 - 1 = 3$ classes d'isomorphismes à deux feuillets de X (les dessiner) et $\frac{3^2-1}{2} = 4$ classes d'isomorphismes de revêtement connexes à 3 feuillets de X correspondant à un sous-groupe normal.

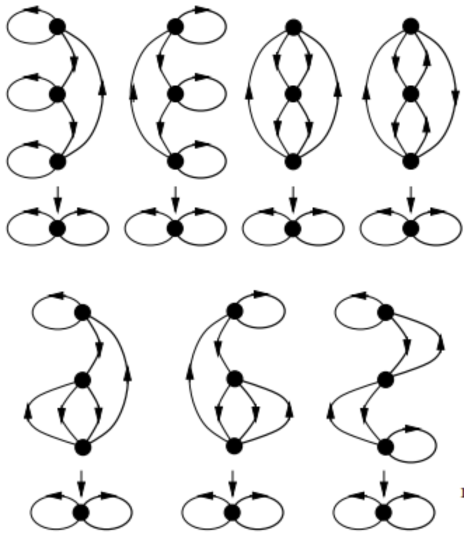
Calculons maintenant le nombre de revêtements non galoisiens (= ne correspondant pas à un sous-groupe normal) de X. Tout revêtement de X est un graphe $2-$orienté. Soit $p\colon Y \to X$ un tel revêtement. Si x est le point base de X, par relèvement des chemins, tout cercle orienté c de X définit une permutation σ_c de $F = p^{-1}(x)$.

Réciproquement, la donnée pour a et b d'une permutation σ_a et σ_b de F définit un graphe X, d'ensemble de sommets F, en recollant une arête orientée d'origine y et d'extremité $\sigma_c(y)$ pour tout $y \in F$ et $c = a, b$. Ce graphe est naturellement $2-$orienté, donc un revêtement de X. Tout isomorphisme de revêtements induit une bijection σ de F. Comme il préserve les relèvements de chemins, cet isomorphisme de revêtements induit donc une conjugaison sur les permutations $\sigma_c \mapsto \sigma\sigma_c\sigma^{-1}$.

Comme il existe un unique homéomorphisme à homotopie près de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui même fixant 0 et 1, on en déduit que l'ensemble des classes d'isomorphismes de revêtments à n feuillets du bouquet de 2 cercles (pas forcément connexe) est en bijection avec

$$S_n \times S_n / S_n$$

où on quotiente par l'action diagonale de S_n par conjugaison sur chacun des facteurs. Pour $n = 3$, modulo conjugaison, il existe 3 permutations : id, (12), (123). Si le revêtement est non galoisien, alors le relèvement d'un des deux cercles orientés de X correspond à une transposition. Si le revêtement est connexe, alors le relèvement de l'autre cercle de X correspond à une transposition ou un $3-$cycle. On a alors 3 classes d'isomorphismes de revêtements non galoisiens connexes à 3 feuillets de X. Voici une illustrations des 7 revêtements à 3 feuillets (tirée du cours de Frédéric Paulin, "Topologie algébrique élémentaire") :



Exercice 4.
Soit $p\colon \tilde{X} \to X$ un revêtement simplement connexe de X et $A \subset X$ un sous-espace connexe par arcs, localement connexe par arcs avec $\tilde{A} \subset \tilde{X}$ une composante connexe de $p^{-1}(A)$ Montrer que $p\colon \tilde{A} \to A$ est un revêtement correspondant au noyau de $\pi_1(A) \to \pi_1(X)$.

Solution 4. Notons d'abord que comme A est connexe par arcs, une composante connexe $\tilde{A} \subset p^{-1}(A)$ se surjecte sur A par p. De plus on vérifie facilement que la restriction donne un revêtement pour la topologie de sous-espace. Maintenant, si on a un lacet dans $\tilde{A}$, ce lacet est null-homotope dans $\tilde{X}$ (càd homotope au lacet constant), car $\tilde{X}$ est simplement connexe. Ainsi, l'image de ce lacet par p est null-homotope dans X (il suffit de composer l'homotopie avec p). D'autre part, on peut considérer l'image de ce lacet de $\tilde{A}$ par p dans A, et par ce qui précède son image par i_* est nulle. Ainsi, $p_*(\pi_1(\tilde{A})) \subset ker\ i_*$. Réciproquement, si un lacet est dans $ker\ i_*$, on peut relever ce lacet en un lacet dans $\tilde{X}$ (puisqu'on peut relever l'homotopie avec le lacet constant dans X), et sans perte de généralité on peut supposer qu'il est contenu dans $\tilde{A}$. En composant avec p, on conclut que ce lacet est dans $p_*(\pi_1(\tilde{A}))$.

Exercice 5. On rappelle que la caractéristique d'Euler d'un graphe connexe G est $\chi(G) = \#\text{sommets} - \#\text{arêtes}$.

1. Montrer que tout revêtement M à fibre finies d'un graphe fini connexe G est encore un graphe fini, tel que $\chi(M) = k\chi(G)$
2. Soit L un groupe libre à $n \geq 1$ générateurs et H un sous-groupe d'indice k de L. Montrer que H est encore un sous-groupe libre, dont on donnera le nombre de générateurs.
3. Soit $n \geq 3$. Montrer que le groupe libre à 2 générateurs admet un sous-groupe isomorphe au sous-groupe libre à n générateurs. Spécifier des générateurs pour $n = 3$.

Solution 5.

1. Soit $p : G' \to G$ un revêtement d'un graphe G. Notons S' l'image réciproque dans G' de l'ensemble de sommets S et A' le sous-ensemble des éléments $(u, v) \in S' \times S'$ tel que $a = (p(u), p(v)) \in A$ est le relèvement du chemin $\gamma_a : [0, 1] \to [0, 1] \times \{a\}$ qui part de u arrive en v dans G'. Alors G' est exactement le graphe de sommets S' et d'arêtes A'.

De plus, si k est le nombre de feuillets, alors G' a k fois le nombre d'arêtes et de sommets de G, donc $\chi(M) = k\chi(G)$.

2. Notons qu'un graphe connexe est homotope à un bouquet de n cercles où $\chi(G) = 1 - n$. Le groupe fondamental d'un graphe est donc un groupe libre à n générateurs. Soit G un graphe de groupe fondamental L. Un sous-groupe $K \subseteq L$ détermine un revêtement fini $M \to G$ à k feuillets, qui est donc un graphe dont le groupe fondamental est K, qui est donc aussi libre. On a $\chi(M) = k\chi(G)$, donc K a $1 - k\chi(G)$ générateurs.

3. Considérons un bouquet de deux cercles. Pour tout $n \geq 2$, il admet un revêtement p_n d'espace total E_n contenant l'union des cercles de $\mathbb{R}^2$ centrés en $(k, 0)$ pour $k = 0, \ldots, n-1$, et de rayon $1/2$. Ce revêtement a le même type d'homotopie qu'un bouquet de n cercles, donc un groupe fondamental F_n, libre à n générateurs. Son image via p_{n*} dans $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ donne un sous-groupe de F_2 isomorphe à F_n (par injectivité de p_{n*}).

   En particulier, pour $n = 3$, on peut projeter trois générateurs libres de $\pi_1(E_3)$ dans $\pi_1(S^1 \vee S^1)$. Si F_2 est librement engendré par a, b, alors a, b^2, bab^{-1} engendrent un sous-groupe libre de rang 3 dans F_2.

+ petite question : dans la feuille de la semaine dernière, on donnait un exemple d'espace n'admettant pas de revêtement simplement connexe. Avez-vous compris pourquoi le théorème 5.7 ne s'applique pas à cet espace ?
Le problème vient du fait que cet espace n'est pas localement connexe par arcs.