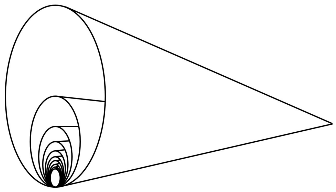
EPFL – Semestre de Printemps 2024–2025
Topologie II **Série 11**

Exercice 1.
On rappelle qu'un espace topologique X est localement simplement connexe si il admet une base de voisinages simplement connexes. De plus X est semi-localement simplement connexe si chaque point $x \in X$ admet un voisinage V tel que l'application induite de l'inclusion $\pi_1(V) \to \pi_1(X)$ est triviale.

1. Montrer que la boucle d'oreille hawaïenne comme sous-espace de $\mathbb{R}^2$ n'est pas semi-localement simplement connexe.
2. Montrer que le cône de la boucle d'oreille hawaïenne est semi-localement simplement connexe, mais qu'il n'est pas localement simplement connexe.



Notons qu'un cône est toujours contractile, en particulier simplement connexe.

Solution 1.

1. Soit U un ouvert contenant le point base 0. On a déjà vu que U contient nécessairement un cercle de rayon $\frac{1}{n}$ pour n suffisamment grand. Le lacet $[\gamma] \in \pi_1(U)$ associé est envoyé sur $i_*[\gamma] \in \pi_1(X)$, qui ne peut pas être homotopiquement trivial puisqu'il n'y a pas de $2-$cellule recollée le long de γ dans X.
2. Le cône est simplement connexe, donc semi-localement simplement connexe puisque tout homomorphisme vers $\pi_1(X)$ est trivial. Cependant il n'est pas localement simplement connexe : au point base $(x_0, 0)$, il existe un ouvert qui se rétracte par déformation sur la boucle d'oreille hawaienne, et le point base de la boucle d'oreille hawaienne n'admet pas de base de voisinage simplement connexe.

Exercice 2.
Soit X le sous-espace de $\mathbb{R}^2$ consistant en l'union du bord du carré $\partial([0,1] \times [0,1])$ avec les segments verticaux $x = 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ dans le carré. Montrer que pour tout revêtement $P \to X$ il existe un voisinage du côté gauche du carré qui se relève de manière homéomorphe dans P. Déduire que X n'admet pas de revêtement simplement connexe.

Solution 2. Supposons que $p : \widetilde{X} \to X$ est un revêtement. Il existe une collection d'ouverts adaptés/trivialisants $\{U_\alpha\}$ recouvrant X.
Chaque U_α est une union d'ensembles de la forme $R \cap X$ où R est un rectangle ouvert dans $\mathbb{R}^2$. Cela vient de la définition de la topologie de sous-ensemble sur X induite par $\mathbb{R}^2$ et de la définition de la topologie produit sur X. Sans perte de généralité, on peut supposer que tous les U_α sont de la forme $R \cap X$, où R est un rectangle ouvert.
Comme le côté gauche de X est compact, il est recouvert par un nombre fini de ces U_α.

En réordonnant les U_α (et en supprimant éventuellement certains), on trouve que le côté gauche de X est recouvert par des ouverts trivialisants de la forme :

$$U_1 = ([0, \epsilon_1) \times [0, b_1)) \cap X$$
$$U_2 = ([0, \epsilon_2) \times (a_2, b_2)) \cap X$$
$$\vdots$$
$$U_N = ([0, \epsilon_N) \times (a_N, 1]) \cap X$$

où

$$0 < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < \cdots < a_N < b_{N-1} < 1$$

On veut construire un relèvement d'un voisinage du côté gauche de X, où le voisinage est de la forme $([0, \epsilon) \times [0, 1]) \cap X$ pour un certain $\epsilon > 0$. Décrivons un procédé en N étapes.
Étape 1. Écrivons $p^{-1}(U_1) = \cap_i \tilde{U}_{1,i}$ où chaque $\tilde{U}_{1,i}$ est envoyé homéomorphiquement sur U_1 par p. Choisissons un $\tilde{U}_{1,i}$. On peut construire un relèvement f_1 de U_1 vers $\widetilde{X}$ en utilisant l'homéomorphisme $(p|_{\tilde{U}_{1,i}})^{-1} : U_1 \to \widetilde{X}$.
Ainsi, on a construit une application f_1 qui relève $([0, c_1) \times [0, b_1)) \cap X$ de manière homéomorphe dans $\widetilde{X}$, où $c_1 = \epsilon_1$.
Étape 2. Écrivons $p^{-1}(U_2) = \coprod_i \widetilde{U}_{2,i}$, où chaque $\widetilde{U}_{2,i}$ est envoyé homéomorphiquement sur U_2 par p. Choisissons un $t \in (a_2, b_1)$. L'un de ces $\widetilde{U}_{2,i}$ contient l'image du point $(0, t)$ sous f_1. Ce $\widetilde{U}_{2,i}$ contient donc aussi l'image de $([0, c_2) \times \{t\}) \cap X$ sous f_1 pour un certain $0 < c_2 \leq \min(c_1, \epsilon_2)$, puisque f_1 est continue. Puisque $([0, c_2) \times (a_2, b_2)) \cap X$ est une union de segments connexes, où chaque segment de droite connexe contient un point de $([0, c_2) \times \{t\}) \cap X$, on conclut que $\widetilde{U}_{2,i}$ contient aussi l'image de $([0, c_2) \times (a_2, b_1)) \cap X$ sous f_1.
On peut construire un relèvement g de U_2 dans $\widetilde{X}$ en utilisant l'homéomorphisme $(p|_{\widetilde{U}_{2,i}})^{-1} : U_2 \to \widetilde{U}_{2,i}$. La restriction de g à $([0, c_2) \times (a_2, b_2)) \cap X$ et la restriction de f_1 à $([0, c_2) \times [0, b_1)) \cap X$ coïncident sur leur domaine d'intersection. D'après le paragraphe précédent, les deux relèvements envoient $([0, c_2) \times (a_2, b_1)) \cap X$ dans $\widetilde{U}_{2,i}$. Ainsi, ils se recollent continûment, nous donnant un relèvement f_2 de $([0, c_2) \times (0, b_2)) \cap X$ dans $\widetilde{X}$.

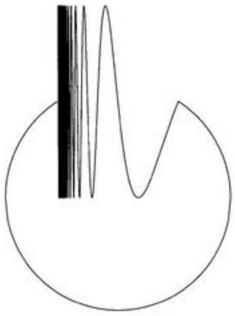
$$\cdots$$

En continuant de cette manière pour N étapes, on obtient un relèvement f_N sur $([0, c_N) \times [0, 1]) \cap X$ pour un certain $c_N > 0$, qui envoie ce voisinage de façon homéomorphe dans $\widetilde{X}$.
Enfin, pour montrer que $\widetilde{X}$ n'est pas simplement connexe, il suffit de choisir un entier k tel que $\frac{1}{k} < c_N$.
Considérons le lacet γ dans X qui est le rectangle

$$(0,0) \to \left(\frac{1}{k}, 0\right) \to \left(\frac{1}{k}, 1\right) \to (0,1) \to (0,0)$$

On peut relever γ en un lacet $\widetilde{\gamma}$ dans $\widetilde{X}$ en utilisant le relèvement f_N. Puisque l'image de $\widetilde{\gamma}$ sous p est γ, qui est un élément non trivial du groupe fondamental de X, $\widetilde{\gamma}$ doit être un élément non trivial du groupe fondamental de $\widetilde{X}$. Cela montre que $\widetilde{X}$ n'est pas simplement connexe.

Exercice 3. Soit Y le quasi-cercle ci-dessous, un sous-espace fermé de $\mathbb{R}^2$ consistant en une portion du graphe $y = sin(\frac{1}{x})$, le segment $[-1, 1]$ de l'axe des ordonnées et un arc connectant les deux.



On peut former un quotient $f \colon Y \to S^1$ avec $S^1 \approx Y/A$, où $A = [-1, 1]$.
Montrer que f ne se relève pas au revêtement $\mathbb{R} \to S^1$, même si $\pi_1(Y) = 0$.
Cela montre la nécessité de l'hypothèse de local connexité par arcs pour le critère de relèvement.

Solution 3. Sans perte de généralité, supposons que l'application quotient f envoie le segment $[-1, 1]$ vers le point base de S^1. Supposons qu'il existe un relèvement $\tilde{f}$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

alors $\tilde{f}$ doit envoyer le segment vers un point de $\mathbb{Z}$. Ainsi $\tilde{f}$ passe au quotient, cela donne une application $g : S^1 \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{f} = g \circ f$, donc

$$f = p \circ \tilde{f} = p \circ g \circ f.$$

Encore une fois, par la propriété universelle de l'espace quotient (il n'existe qu'une seule telle application), on a $p \circ g = \mathrm{id}$, ce qui est une contradiction puisque g ne peut pas être injective.

Exercice 4. Montrer que si un espace X localement connexe par arcs, connexe par arcs tel que $\pi_1(X)$ est fini, alors tout application $X \to S^1$ est homotope à une application constante (i.e. null-homotope).
Indication : utiliser le revêtement $\mathbb{R} \to S^1$.

Solution 4. Montrons d'abord qu'une telle f induirait une application nulle sur le groupe fondamental. Supposons que $n = |\pi_1(X)|$. Prenons un élément $\omega \in \pi_1(X)$. On a $\omega^n = 1$. Alors $f_*(\omega^n) = n \cdot f_*(\omega) = 0 \in \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Donc $f_*(\omega) = 0$, f_* est l'application triviale.
Par le critère de relèvement, il existe un relèvement $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Comme $\mathbb{R}$ est contractile, $\tilde{f}$ est homotope à une application constante. Il existe donc une homotopie $F : X \times I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = \text{constante}.$$

En composant avec le revêtement $p : \mathbb{R} \to S^1$, on obtient une homotopie :

$$G := p \circ F : X \times I \to S^1$$

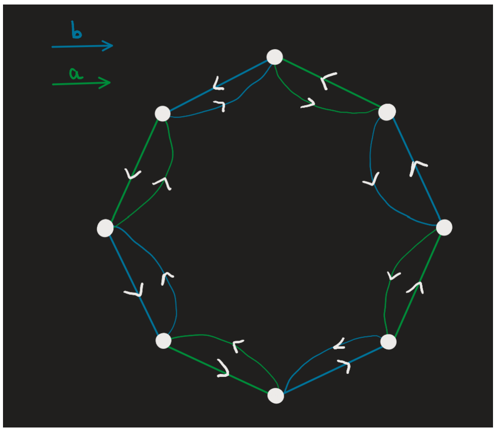
entre f et une application constante. Ainsi, f est homotope à une application constante.

Exercice 5. Soient a et b les générateurs canoniques de $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ (c'est à dire correspondant à chacune des copies de S^1.

1. Dessiner un revêtement de $S^1 \vee S^1$ correspondant au sous-groupe normal engendré par $a^2, b^2, (ab)^4$.
2. Le démontrer.

Solution 5.

1.



2. (idée) On a utilisé la construction du revêtement universel expliquée en cours, qui donne le graphe de Cayley ici. On a identifié les points $[a] \sim [a^{-1}]$, $[b] \sim [b^{-1}]$ et $[(ab)^2] \sim [(ab)^{-2}]$ puis utilisé que les changements de point base correspondent à la conjugaison pour répliquer ces identifications à partir des autres sommets du graphe. On conseille fortement de regarder la page 58 du livre de Hatcher `https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT+.pdf` pour voir d'autres exemples. De plus, l'étude ultérieure de la classification des revêtements vous permettra de comprendre le rôle particulier des revêtements correspondant à des sous-groupes normaux. Ce sont les plus symétriques, ils ont un groupe d'automorphismes donné par le groupe quotient, ici D_8.