EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Corrigé de la série 0
Topologie II

Comme rappelé lors de la session d'exercice, dans ce cours, toutes les applications sont supposées continues.

Exercice 1. Montrer qu'un espace topologique est séparé si et seulement si la diagonale Δ est fermé dans $X \times X$.
Solution 1.
$\Rightarrow$. Supposons que X est un espace séparé (=Hausdorff). Montrons que le complémentaire de la diagonale Δ est ouvert. Pour cela, prenons un point $(x, y) \in X \setminus \Delta$ et montrons qu'il existe un voisinage ouvert de ce point contenu dans $X \setminus \Delta$. Par définition, $x \neq y$ et comme X est séparé, il existe des ouverts U_x et V_x disjoints contenant x et y. L'ensemble $U_x \times U_y$ est ouvert dans $X \times X$ pour la topologie produit. Il contient (x, y) et n'intersecte pas la diagonale car U_x et V_x sont disjoints. On peut donc conclure que $X \setminus \Delta$ est ouvert et Δ fermé.

$\Leftarrow$. Supposons que Δ est fermé. Soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Comme $X \setminus \Delta$ est ouvert il existe un voisinage ouvert U de (x, y) dans $X \times X$ qui n'intersecte pas la diagonale. Comme une base de la topologie produit est donné par les produits $U \times V$ d'ouverts de X, il existe deux ouverts U_x et V_y tels que $U_x \times V_y \subseteq U$. Ainsi, U_x contient x, V_y contient y et ils sont disjoints puisque U n'intersecte pas la diagonale. On peut donc conclure que X est séparé.

Exercice 2. Démontrer la Proposition 2.5 du cours : montrer qu'une application (continue) bijective d'un espace compact vers un espace séparé est un homéomorphisme.
Solution 2.
Soit $f : K \to X$ une telle application. Il suffit de montrer que la bijection réciproque $f^{-1} : X \to K$ est continue. Cela équivaut à demander que f soit fermée. Soit F un fermé de K. Comme K est compact, F est compact. Or f est continue, donc envoie les compacts sur des compacts. De plus, $f(F)$ étant compact dans un espace séparé, $f(F)$ est fermé.

Exercice 3. Montrer que si X est un espace séparé qui contient deux compacts K_1 et K_2 tels que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ alors il existe des ouverts U_1 et U_2 tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ et $K_i \subseteq U_i$ pour $i = 1, 2$.
Solution 3.
Prenons $x \in K_1$. Par séparation, pour tout $y \in K_2$ il existe des ouverts $U^1_{x,y}$ et $U^2_{x,y}$ disjoints contenant x et$y$ respectivement. L'ensemble des $\{U^2_{x,y} \mid y \in K_2\}$ forme un recouvrement ouvert de K_2, il existe donc un sous-recouvrement fini donné par $\{U^2_{x,y} \mid y = y_1, \ldots, y_n \in K_2\}$. Notons U_x l'union de ces ouverts. On considère alors l'intersection finie $V_x = \cap_{i=1}^n U^1_{x,y_i}$. C'est un voisinage de x, disjoint de U_x. En répétant l'opération pour tout x de K_1, on obtient un recouvrement ouvert de K_1. Il suffit alors de prendre un sous-recouvrement finie indexé par $x_1, \ldots, x_k$ et considérer U_2 comme étant l'intersection finie des U_{x_i}. Elle contient K_2 et est disjointe de tous les V_{x_i} et donc de leur union U_1. On a donc trouvé U_1 et U_2 comme dans l'énoncé.

Exercice 4*. Si A est un sous-espace d'un espace topologique X, il existe au maximum 14 sous-espaces de X que l'ont peut obtenir à partir de A avec les opérations "prendre le complémentaire" et "prendre l'adhérence". Vous pouvez (au choix) :

1. Essayer de trouver un exemple maximal (ou presque) d'un tel sous-espace A, au sens il existe 14 (ou presque) sous-ensembles distincts que l'on peut obtenir avec le complémentaire et

l'adhérence.

2. Essayer de démontrer ce résultat. Pour cela, vous pouvez considérer les opérations obtenues à partir des deux opérations "adhérence" (noté a) et "complémentaire" (noté c) comme des mots avec les lettres a et c. Par exemple, on écrit cac pour signifier l'opération "prendre le complémentaire de l'adhérence du complémentaire". Ensuite, considérez les relations, comme en théorie des groupes. Par exemple, notez que $ccA = A$. Il pourra être utile de considérer l'opération i "intérieur", en notant que $cacA = iA$.

Remarque (modifiée) : ces deux opérations ne commutent pas et n'engendrent pas un groupe, mais un monoïde, puisque l'opération d'adhérence est idempotente (c'est à dire $a^2 = a$) et ne peut pas posséder d'inverse.

Solution 4. Il s'agit du Théorème de fermeture/complémentaire de Kuratowski. On renvoie à sa page Wikipedia, qui contient un exemple maximal ainsi que la relation qui permet de prouver que 14 est maximal. Notez que l'opération a est notée k.