Séries 1 à 14 des exercices

La géométrie différentielle peut très brièvement se résumer dans l'idée d'appliquer des méthodes de calcul différentiel et d'analyse à des problèmes de géométrie, en particulier à l'étude des courbes, des surfaces et d'objets généralisant ces notions. Toutefois le géométrie différentielle ne se réduit pas au seul usage du calcul différentiel mais fait intervenir d'autres techniques telles que celles de l'algèbre linéaire, de la géométrie vectorielle, la théorie des groupes, la topologie, ainsi que la géométrie euclidienne classique. Cette première série d'exercices propose de revisiter le produit vectoriel d'une part, et de construire une preuve de l'inégalité isopérimétrique dans le plan d'autre part.

Exercice 1.1. On rappelle que le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis dans une base orthonormée directe (i.e. d'orientation positive) par $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ et $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$ est le vecteur

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j \, \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{e}_3 \\
&= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Prouver que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ est uniquement déterminé par les conditions géométriques suivantes :

(a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$ et $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$.

(b) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \text{aire}(\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ (où $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est le parallélogramme construit sur les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$).

(c) Si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont linéairement indépendants, alors $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$ est une base d'orientation positive de $\mathbb{R}^3$.

Les exercices qui suivent visent à démontrer l'inégalité isopérimétrique dans le plan. Considérons un domaine borné D contenu dans la plan $\mathbb{R}^2$. Son bord ∂D est la réunion d'une ou plusieurs courbes et on appelle périmètre de D la longueur totale de ∂D (qui peut éventuellement être infinie). Le quotient isopérimétrique de D est défini par

$$\text{Isp}(D) = \frac{(\text{Longueur}(\partial D))^2}{\text{Aire}(D)}.$$

L'inégalité isopérimétrique dans le plan affirme que *le quotient isopérimétrique minimal parmi tous les domaines du plan est atteint pour les disques, i.e. pour tout domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$ on a*

$$\text{Isp}(D) \geq \text{Isp}(\mathbb{B}^2),$$

où $\mathbb{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$ est le disque unité du plan. De plus on a égalité si et seulement si D est un disque (de rayon quelconque).

Avant de commencer les exercices qui suivent, prenez un moment pour réfléchir à cette inégalité; vous pouvez en discuter entre vous. Comprenez-vous ce qu'elle signifie? Quel genre de raisonnement faut-il faire pour établir une preuve de cette inégalité ?

Exercice 1.2. (a) Prouver que le quotient isopérimétrique est invariant par similitude (une similitude du plan ou de l'espace euclidien est une bijection qui préserve les rapport de distances; c'est donc la composition d'une homothétie et d'une isométrie).

(b) Calculer le quotient isopérimétrique d'un carré, d'un triangle équilatéral et d'un disque.

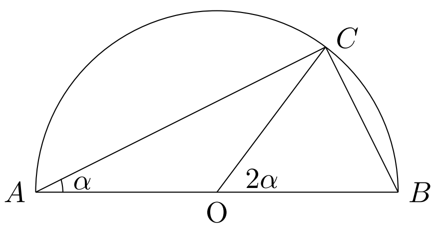
Le but des exercices 1.3 à 1.9 est de conduire à une preuve de l'inégalité isopérimétrique dans le plan. On utilisera uniquement des résultats de géométrie euclidienne de base et des propriétés intuitives élémentaires des notions de longueur et d'aire.

Exercice 1.3. Prouver la proposition 32 du livre 1 des Éléments d'Euclide. Cette proposition dit que la somme des angles de tout triangle est égale à deux angles droits.
Indication. Il faut utiliser le postulat des parallèle[1].

Exercice 1.4. (a) Soit C un point sur le cercle de diamètre $[A, B]$ (supposé distinct de A et B). Prouver que l'angle en O du triangle OCB est le double de l'angle en A du triangle ACB:

$$\sphericalangle_O CB = 2 \sphericalangle_A CB$$

(on écrit aussi $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$).



(b) Prouver ensuite le théorème du demi-cercle de Thales : Le triangle ABC est un triangle rectangle en C si et seulement le point C est un point du cercle de diamètre $[A, B]$ (rappelons que ABC est un triangle rectangle en C si $\sphericalangle_C AB = \pi/2$).

Exercice 1.5. Prouver que parmi tous les triangles ABC tels que $x = d(A, C)$ et $y = d(B, C)$, celui qui maximise l'aire est le triangle rectangle en C.

Exercice 1.6. Rappelons qu'un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est convexe, si pour toute paire de points $A, B \in D$, le segment $[A, B]$ est contenu dans D. Prouver que si $D \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas convexe, alors ce domaine ne minimise pas le quotient isopérimétrique (i.e. on peut construire un autre domaine D' tel que $\mathrm{Isp}(D') < \mathrm{Isp}(D)$).

Exercice 1.7. Supposons que $D \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine isopérimétrique optimal (en particulier D est convexe), notons $\Gamma = \partial D$ son bord. Soient $A, B \in \Gamma$ deux points du bord de D qui partagent la courbe Γ en deux parties d'égales longueurs. Montrer alors que la corde $[A, B]$ partage D en deux régions d'aires égales.

[1] Le postulat des parallèle, aussi appelé 5ème postulat d'Euclide énonce que dans un plan, par tout point extérieure à une droite il passe une unique parallèle à cette droite.

Exercice 1.8. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine isopérimétrique optimal et Γ, A, B comme dans l'exercice précédent. Montrer alors que pour tout point P de Γ, différents de A et B, on a $\sphericalangle_P AB = \pi/2$.

Indication. Supposant par l'absurde que ça n'est pas le cas pour un certain point P, utiliser l'exercice 1.6 pour construire un domaine D' dont le périmètre est égal à celui de D mais $\text{Aire}(D') > \text{Aire}(D)$.

Exercice 1.9. A partir des exercices précédents, prouver l'inégalité isopérimétrique dans le plan : pour tout domaine du plan on a $\text{Isp}(D) \geq 4\pi$, avec égalité si et seulement si D est un disque (on admet l'existence d'un domaine isopérimétrique optimal, il s'agit ici de prouver l'unicité)

Exercice 2.1. Prouver les formules suivantes concernant le produit vectoriel :

Pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ *on a*

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a}$ (première dentité de Grassmann),

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$ (seconde identité de Grassmann).

(iii) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ (identité de Lagrange).

(iv) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$.

Indication. En choisissant une base orthonormée directe bien adaptée au problème, on peut simplifier les calculs.

Exercice 2.2. Montrer que pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ on a

i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0$ (première identité de Jacobi)

ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ (deuxième identité de Jacobi.)

Exercice 2.3. Le produit vectoriel dans $\mathbb{E}^3$ est-il associatif ?

Exercice 2.4. (a) Rappeler ce qu'est une *similitude* d'un espace vectoriel euclidien.

(b) Prouver que les similitudes d'un espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}^n$ forment un groupe.

(c) Prouver que les isométries forment un sous-groupe normal du groupe des similitudes.

(d) Expliquer pourquoi une similitude qui fixe l'origine $0 \in \mathbb{E}^n$ est une application linéaire.

(e) Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes pour application linéaire inversible $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$:

   (i) f est une similitude.

   (ii) f préserve les angles, i.e. si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ sont non nuls, alors l'angle entre $f(\mathbf{a})$ et $f(\mathbf{b})$ est égal à l'angle entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

   (iii) f préserve l'orthogonalité, i.e. si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ alors $f(\mathbf{a}) \perp f(\mathbf{b})$.

(f) On peut identifier $\mathbb{C}$ au plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une similitude linéaire directe si et seulement si f est la multiplication par un nombre complexe non nul (i.e. on a $f(z) = az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$).

Exercice 2.5. Donner un exemple de courbe fermée simple qui est de classe C^1, mais pas de classe C^2.

Exercice 2.6. A quelle condition le graphe d'une fonction f représente-t-il une courbe birégulière ?

Exercice 2.7. Par définition, la longueur d'un arc de courbe $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est l'intégrale $\ell(\alpha) = \int_a^b V_\alpha(u)du$ où $V_\alpha(u) = \|\dot{\alpha}(u)\|$ est la vitesse de α.

Calculer la longueur des courbes suivantes :

(a) $\alpha(u) = (\cos(u), \sin(u), u)$. $\quad -\pi \leq u \leq \pi \quad$ (la courbe α est une hélice circulaire droite).

(b) $\beta(u) = (\mathrm{e}^u\,,\ \mathrm{e}^{-u}\,,\ \sqrt{2}u)$. $\quad 0 \leq u \leq t$.

(c) $\gamma(u) = (u\cos(u), u\sin(u))$. $\quad 0 \leq u \leq 4\pi \quad$ (la courbe γ est une spirale d'Archimède).

Exercice 2.8. La cycloïde est la courbe décrite par un point sur le bord d'une roue qui roule, sans glisser, en ligne droite.

(a) Dessiner une cycloïde

(b) Donner un paramétrage de la cycloïde (préciser d'abord le choix de la situation et du système de coordonnées).

(c) Calculer la longueur d'une arche de la cycloïde (en supposant que la roue engendrant la cycloïde est de longueur r)

Exercice 2.9. Discuter le *paradoxe de la roue d'Aristote.*
On considère deux roues attachées solidairement ensemble et centrées sur un même axe, l'une de rayon 2 et l'autre de rayon 1. On fait rouler ces roues (solidairement) sur une route pendant un tour de roue. Le centre de la grande roue s'est alors déplacé d'une distance de 4π et celui de la petite roue d'une distance de 2π. Conclusion $4\pi = 2\pi$.

Dans cette série on on avance avec la théorie des courbes (abscisse curviligne, paramétrage naturel). Enfin on approfondit quelques points subtils liés à la notion de longueur.

Exercice 3.1. Exprimer la longueur de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sous forme d'une intégrale (ne pas essayer de calculer cette intégrale, qui ressort de la théorie des *fonctions elliptiques*).

Exercice 3.2. (a) Calculer l'abscisse curviligne de la courbe

$$\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t),$$

depuis le points initial $t_0 = 0$.
(b) Trouver ensuite le paramétrage naturel avec le même point initial.

Exercice 3.3. L'astroïde est la courbe plane d'équation

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 1.$$

(a) Dessiner l'astroïde.

(b) Trouver une paramétrisation de l'astroïde

(c) Calculer la longueur d'un cycle de l'astroïde.

(d) Chercher tous les points singuliers.

(e) Calculer l'abscisse curviligne avec avec point initial en $(1, 0)$.

(f) Trouver le paramétrage naturel avec le même point initial.

Exercice 3.4. (a) Notons (x, y) les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^2$. Rappeler la définition précise des *cordonnées polaires* (r, θ), en précisant leur domaine de définition.
(b) Écrire l'équation générale d'une droite en cordonnées polaires, puis l'équation d'un cercle de rayon a et de centre $c = (r_0, \theta_0)$.
(c) Soit $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$ une courbe de classe C^1 écrite en coordonnées polaires. Trouver et prouver une formule donnant sa longueur dans ces coordonnées.
(d) La *spirale logarithmique* est la courbe plane d'équation polaire $r = e^{\theta}$. Utiliser la formule précédente pour calculer la longueur d'un cycle de cette spirale défini par $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Donner ensuite le paramétrage naturel avec le point $(1, 0)$ comme point initial.

Exercice 3.5. La *conchoïde de Nicomède* est la courbe $\mathcal{C}$ dans le plan euclidien qui est définie de la façon suivante:
On considère un point O dans le plan et une droite D qui ne passe pas par O. Pour tout point p du plan tel que $p \notin D$ et $p \neq O$ on note $f(p) = d(p, q)$ où q est l'intersection de D avec la droite passant par O et p (i.e. $q = (O + \mathbb{R}\overrightarrow{Op}) \cap D$) :

$$\mathcal{C} = \{p \in \mathbb{E}^2 \mid f(p) = b\}.$$

(a) Dessiner la courbe $\mathcal{C}$. Est-elle connexe ?

(b) Donner une équation polaire de cette courbe (on supposera que la droite D est verticale et que le point O est l'origine).

Exercice 3.6. Soit $F : I \to SO(n) \subset M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n\times n}$ une courbe de classe C^1 à valeurs dans le groupe orthogonal. Prouver que $F(t)^{-1}\dot{F}(t)$ et $\dot{F}(t)F(t)^{-1}$ sont des matrices antisymétriques pour tout $t \in I$.

Exercice 3.7. On rappelle que l'exponentielle $\exp(A)$ d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ est définie par la série :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots$$

On admet que cette série converge. On admet aussi que si $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ (la preuve est la même que pour le cas de l'exponentielle d'une somme de deux nombres réels).

(a) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique, alors $\exp(A) \in SO(n)$.

(b) Calculer la matrice $\exp(tJ)$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.8. Prouver l'affirmation suivante ou trouver un contre-exemple : *Si $\gamma_n : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est une suite de courbes convergeant uniformément vers la courbe $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (supposée de classe C^1), alors les longueurs convergent, i.e. $\ell(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \ell(\gamma_n)$.*

Exercice 3.9 (Distance intrinsèque dans un domaine.)**.** Le but est de cet exercice est de définir la notion de *distance intrinsèque* dans un domaine de $\mathbb{R}^n$ (par définition, un *domaine* de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert et connexe).

Soit donc $U \subset \mathbb{R}^n$ et $p, q \in U$. On note $\mathcal{C}_{pq}$ l'ensemble des courbes $\gamma : [a,b] \to U$ qui sont continues, de classe C^1 par morceaux et qui relient p à q. On défini alors la *distance intrinsèque* dans U de p à q par

$$\delta_U(p,q) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}_{pq}\}.$$

(a) Prouver que $\mathcal{C}_{pq} \neq \emptyset$ pour tous $p, q \in U$.

(b) Prouver que $\delta_U(p,q) \geq \|q-p\|$ pour tous $p, q \in U$.

(c) Prouver que (U, δ_U) est un espace métrique.

(d) A quelle condition sur le domaine U a-t-on $\delta_U(p,q) = \|q-p\|$ pour tous $p, q \in U$? (donner une condition suffisante).

(e) Considérons le cas du domaine $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -1 \text{ ou } y \neq 0\}$. Quelle est la distance intrinsèque entre les points $p = (0,1)$ et $q = (0,-1)$?
Est-ce qu'il existe une courbe de longueur minimale reliant p à q?

(On dit que $\delta_U(p,q)$ est la *distance intrinsèque* de p à q dans le domaine U et que $d(p,q) = \|q-p\|$ est la distance euclidienne *extrinsèque*).

A. Exercices standards.

Exercice 4.1. Si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, on dit que le vecteur $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ est la *composante normale* de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ selon $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ si $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} + \mathbf{c}$. Montrer que cette composante normal peut s'écrire

$$\mathbf{c} = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

Exercice 4.2. Démontrer que le vecteur (unitaire) tangent et le vecteur de courbure d'une courbe régulière de classe C^2 sont des notions géométriques, i.e. ces champs de vecteurs sont invariants par reparamétrisation directe.

Exercice 4.3. Nous avons défini le *vecteur normal principal* $\mathbf{N}_\alpha$ et le *vecteur de courbure* $\mathbf{K}_\alpha$ d'une courbe birégulière α de classe C^2 par

$$\mathbf{N}_\alpha = \frac{\ddot{\alpha} - \langle \ddot{\alpha}, \mathbf{T}_\alpha \rangle \mathbf{T}_\alpha}{\|\ddot{\alpha} - \langle \ddot{\alpha}, \mathbf{T}_\alpha \rangle \mathbf{T}_\alpha\|} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{K}_\alpha = \frac{1}{\|\dot{\alpha}\|} \dot{\mathbf{T}}_\alpha.$$

Prouver que $\mathbf{K}_\alpha = \kappa_\alpha \mathbf{N}_\alpha$, où $\kappa_\alpha = \|\mathbf{K}_\alpha\|$ est la courbure de α.

Exercice 4.4. Prouver que la courbe $\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$ est birégulière, puis calculer son vecteur de courbure et sa courbure (la courbure est la norme du vecteur de courbure).

Exercice 4.5. Prouver la formule suivante qui donne la courbure d'une courbe régulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2 dans $\mathbb{R}^3$:

$$\kappa_\gamma(u) = \frac{\|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)\|}{V_\gamma^3}.$$

Exercice 4.6. La *développée* d'une courbe birégulière $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est la courbe $\beta : I \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\beta(u) = \alpha(u) + \frac{1}{\kappa_\alpha(u)} \mathbf{N}_{\alpha_u}$$

où $\rho_\alpha(u) = \frac{1}{\kappa_\alpha(u)}$ est le *rayon de courbure* et $\mathbf{N}_{\alpha_u}$ est le vecteur normal principal. La développée d'une courbe est donc le lieu géométrique de ses centres de courbure (= centre du cercle osculateur).

Calculer les développées des courbes suivantes:

(a) Un cercle dans $\mathbb{R}^n$.

(b) Une droite dans $\mathbb{R}^n$.

(c) L'hélice circulaire droite $\alpha(u) = (a\cos(u), a\sin(u), b\,u)$ dans $\mathbb{R}^3$ (on suppose $a, b > 0$).

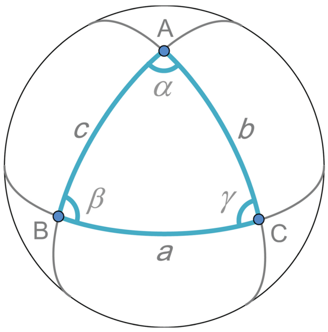
(d) La cycloïde $\gamma(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))$ dans $\mathbb{R}^2$.

Prouver que la développée de l'hélice est de nouveau une hélice et que la développée de la cycloïde est aussi une cycloïde.

Exercice 4.7. Sans faire aucun calcul, dessiner (approximativement) une ellipse et sa développée. Expliquer votre raisonnement.

On appelle *triangle sphérique* la donnée de trois points A, B, C sur une sphère S, avec les arcs de grand-cercles a (reliant B et C), b (qui relie A et C) et c (qui relie A et B). Ces arcs de grand-cercles sont les *côtés* du triangle sphérique. On note α l'angle formé par les arcs b et c au point A, de même on note β l'angle en B et γ l'angle en C.

Rappelons qu'on appelle *grand-cercle* sur une sphère, un cercle formé par l'intersection de cette sphère avec un plan passant par le centre de la sphère. Les autres cercles tracés sur la sphère sont les *petit-cercles*. Deux points sur une sphère sont toujours reliés par deux arcs de grand-cercles; dans la détermination d'un triangle sphérique, on ne considère que le plus petit de ces deux arcs.



Exercice 4.8. Par abus de notations, nous notons aussi par a, b, et c les longueurs des côtés du triangle sphérique. Démontrer la formule de trigonométrie sphérique suivante:

$$\cos\left(\frac{c}{r}\right) = \cos\left(\frac{a}{r}\right)\cos\left(\frac{b}{r}\right) + \sin\left(\frac{a}{r}\right)\sin\left(\frac{b}{r}\right)\cos(\gamma),$$

où r est le rayon de la sphère.

Exercice 4.9. La distance sphérique $d_S(A, B)$ entre deux points A et B sur une sphère S est par définition la longueur de l'arc de grand cercle reliant ces deux points.

Montrer à partir de la trigonométrie sphérique que d_S vérifie bien toutes les propriétés d'une distance.

B. Exercice complémentaire (ne fera pas partie du champ de l'examen).

Exercice 4.10. Le but de cet exercice est de montrer qu'on peut (re)définir la longueur d'une courbe de classe C^1 par un processus d'"approximations polygonales".

Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1, et soit $\sigma = [t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b]$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. On note

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{m-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

où le suprémum est pris sur toutes les subdivisions de $[a, b]$ et $d(p, q) = \|q - p\|$.

(a) Faire un dessin et expliquer brièvement la signification de cette formule.

(b) Montrer que pour tout courbe C^1 on a $L(\gamma) \leq \ell(\gamma)$, où $\ell(\gamma)$ est la longueur de γ telle que définie dans le cours.

(c) Prouver l'inégalité inverse $\ell(\gamma) \leq L(\gamma)$.
(Indication : Utiliser que $\dot{\gamma}$ est uniformément continue et montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une subdivision suffisamment fine de $[a, b]$ telle que $\ell(\gamma) \leq \sum_{i=1}^{m-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + 2\varepsilon(b - a)$).

Remarque générale sur la longueur des courbes.

Les exercices précédents montrent que si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est une courbe de classe C^1, alors $L(\gamma) = \ell(\gamma)$, c'est-à-dire

$$\sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{m} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Il est clair que cette formule est encore vraie pour une courbe de classe C^1 par morceaux. Henri Lebesgue s'était posé la question suivante dans sa thèse dont le titre est *Intégrale, Longueur, Aire* (soutenue en 1902) : *Pour quelle classe de courbes*

$$\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \qquad (a \leq t \leq b)$$

la plus générale possible, a-t-on $L(\gamma) < \infty$ *et* $L(\gamma) = \ell(\gamma)$ *?*

Et il a formulé les réponses suivantes :

(i) La courbe γ est rectifiable (i.e. $L(\gamma) < \infty$) si et seulement si toutes les fonctions $t \mapsto x_i(t)$ sont à variation bornée.

(ii) On a l'égalité $\ell(\gamma) = L(\gamma) < \infty$ si et seulement si toutes les fonctions $t \mapsto x_i(t)$ sont absolument continues.

Les notions de fonctions *à variation bornée* et *absolument continues* sont définies dans les bons livres d'analyse réelle (par exemple l'excellent livre de Kolmogorov-Fomin). Faisons juste les remarques suivantes :

(a) Toute fonction à variation bornée admet une dérivée presque partout.

(b) Toute fonction absolument continue est à variation bornée.

(c) Inversement il existe des fonctions à variation bornée qui ne sont pas absolument continues.

(d) Toute fonction lipschitzienne est absolument continue.

Soulignons pour finir qu'il existe des courbes rectifiables pour lesquelles $\ell(\gamma) < L(\gamma)$. Un exemple est donné par le graphe de la fonction de Cantor-Vitalli (parfois appelé *escalier du diable*).

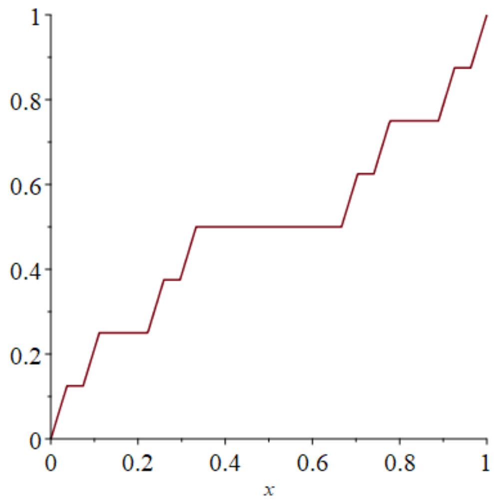


Figure 1: Une approximation de la fonction de Cantor-Vitalli

Les objectifs pour cette série sont les suivants :

- Développer une intuition de la torsion et de la courbure et leur signification géométrique.
- Développer une certaine pratique et des bonnes stratégies pour les calculs géométriques liés aux courbes, en particulier se familiariser avec le repère de Frenet, savoir utiliser les équations de Serret-Frenet et comprendre les conséquences du théorème fondamental.

A. Exercices standards.

Exercice 5.1. Prouver que la courbe $\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$ est birégulière, puis calculer son vecteur de courbure et sa courbure (la courbure est la norme du vecteur de courbure).

Exercice 5.2. Considérons la courbe

$$\gamma(t) = (\cos(t) + t\sin(t), \sin(t) - t\cos(t), t^2), \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(a) Trouver le ou les points singuliers de cette courbe.

(b) Calculer l'abscisse curviligne $s = s(t)$ de cette courbe depuis le point initial $\gamma(0)$.

Pour les questions qui suivent on se restreint à $t > 0$.

(c) Calculer le vecteur tangent $\mathbf{T}_\gamma(t)$ et le vecteur de courbure $\mathbf{K}_\gamma(t)$.

(d) Quels sont les points biréguliers de γ ?

(e) Calculer la courbure $\kappa_\gamma(t)$ de cette courbe et le vecteur normal principal $\mathbf{N}_\gamma(t)$.

(f) Donner le vecteur binormal $\mathbf{B}_\gamma(t)$ (aux points biréguliers).

(g) Trouver la torsion de γ.

Exercice 5.3. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière de classe C^3. On appelle *vecteur de Darboux* de γ le champ de vecteurs $\mathbf{D}_\gamma$ défini le long de γ par

$$\mathbf{D}_\gamma(u) := \tau_\gamma(u)\mathbf{T}_\gamma(u) + \kappa_\gamma(u)\mathbf{B}_\gamma(u)$$

Montrer que pour tout champ de vecteurs $\mathbf{A}$ le long de γ s'écrivant $\mathbf{A}(u) = a_1(u)\mathbf{T}(u) + a_2(u)\mathbf{N}(u) + a_3(u)\mathbf{B}(u)$, on a

$$\frac{1}{V}\frac{d}{du}\mathbf{A} = \frac{1}{V}\left(\dot{a_1}\ \mathbf{T}\ + \dot{a_2}\ \mathbf{N}\ + \dot{a_3}\ \mathbf{B}\right) + \mathbf{D} \times \mathbf{A}.$$

(C'est la *Formule de Darboux*).

Exercice 5.4. Calculer le vecteur de Darboux de l'hélice circulaire droite $\gamma(u) = (a\cos(u), a\sin(u), bu)$.

Exercice 5.5. Considérons la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = (t, t^2 + |t|^3, 0).$$

Montrer que cette courbe est régulière au sens de Frenet mais elle n'est pas de classe C^3 (la définition de la régularité de Frenet se trouve en page 32 du polycopié, édition 2024).

Calculer ensuite le repère de Frenet.

Exercice 5.6. Que peut-on dire d'une courbe (régulière au sens de Frenet) dont la courbure et la torsion sont constantes ?

Exercice 5.7. Montrer que la torsion d'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ birégulière de classe C^3 peut se calculer par la formule suivante:

$$\tau(u) = \frac{[\dot{\gamma}(u), \ddot{\gamma}(u), \dddot{\gamma}(u)]}{\|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)\|^2} = \frac{[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma}]}{\kappa^2(u)V_\gamma^6(u)}$$

où $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \times \mathbf{z}\rangle$ représente le produit mixte de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.8. Montrer qu'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ (C^3 et birégulière) est une hélice circulaire droite si et seulement si son vecteur de Darboux est constant.

B. Exercice complémentaire

Exercice 5.9. *On sait qu'à un déplacement près, la géométrie d'une courbe est déterminée par sa courbure et sa torsion. Ceci implique que toute propriété géométrique se traduit en une ou plusieurs équations sur τ et κ. Le but de cet exercice est d'illustrer ceci dans le cas des courbes sphériques (i.e. les courbes tracées sur une sphère).*

(a) Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^3 birégulière, de torsion non nulle et paramétrée normalement. Supposons que $\|\gamma(s)\| = r =$ constante. Montrer que pour tout s on a

$$\gamma(s) + \rho(s)\mathbf{N}(s) + \frac{\dot{\rho}(s)}{\tau(s)}\mathbf{B}(s) = 0,$$

où τ est la courbure de γ et $\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ est le rayon de courbure.

En déduire que la fonction

$$s \mapsto \rho(s)^2 + \left(\frac{1}{\tau(s)}\dot{\rho}(s)\right)^2$$

est constante.

(b) Dans le sens réciproque : Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^3 birégulière paramétrée normalement. On suppose que la courbure de γ est strictement croissante et la torsion est non nulle. Démontrer que γ est une courbe sphérique (i.e. elle est tracée sur une sphère) si et seulement si

$$\rho(s)^2 + \left(\frac{1}{\tau(s)}\dot{\rho}(s)\right)^2$$

est constante.

Déterminer ensuite le centre et le rayon de la sphère .

Objectifs pour cette série :

Dans cette série on étudie la courbure des courbures planes et sa signification géométrique.

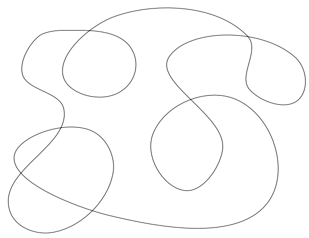
On commence aussi une révision du calcul différentiel.

A. Exercices standards.

Exercice 6.1. (a) Soit γ une courbe plane dont la courbure k est une fonction monotone de l'abscisse curviligne. Cette courbe peut-elle être une courbe C^2 fermée ?

(b) Considérons les courbes planes suivantes : un cercle, une ellipse, une parabole, que l'on paramétrise naturellement. Pour chacune de ces courbes, représenter qualitativement le graphe de la fonction $s \to k(s)$ (ce graphe s'appelle le *diagramme de courbure* de la courbe considérée).

Exercice 6.2. Que vaut l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma \kappa \, \mathrm{d}s$ pour la courbe suivante ?



Exercice 6.3. Le tracé d'une route ou d'une voie de chemin de fer est habituellement constitué de segments de droites, d'arcs de cercles et d'arcs de chlotoïdes.
Voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Trac%C3%A9_en_plan_(route)`.

(a) Rappeler ce qu'est une chlotoïde.

(b) Pour quelle raison, à votre avis, on utilise des arcs de chlotoïdes dans les tracés ferroviaires ?

Exercice 6.4. Un peu de calcul différentiel :

(a) Calculer la différentielle (au sens de Frechet) $d\varphi_A(H)$ de l'application $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(A) = A^3$, pour $A, H \in M_n(\mathbb{R})$ quelconques. Que peut-on dire du cas particulier où A et H commutent ?

(b) On considère deux applications différentiables $\phi, \psi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$. Montrer la version suivante de la règle de Leibniz :

$$d(\phi \cdot \psi)_A(H) = d\phi_A(H)\psi(A) + \phi(A)d\psi_A(H),$$

où $(\phi \cdot \psi)(A) = \phi(A) \cdot \psi(A)$ (produit matriciel).

(c) En utilisant le résultat précédent, montrer que si $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ est définie par $\phi(A) = A^{-1}$, alors

$$d\phi_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$

Exercice 6.5. Prouver que l'application : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ données par

$$(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) = (x_1 \cos(x_2),\ x_2 - x_1 x_2)$$

est un difféomorphisme au voisinage de $(0, 0)$.

Exercice 6.6. a.) Rappeler la définition de la notion de *système de coordonnées curviligne.*

b.) Prouver l'affirmation suivante ou donner un contre-exemple : *Si* $\{x_1, x_2\}$ *et* $\{y_1, y_2\}$ *sont deux systèmes de coordonnées curvilignes sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^2$ *et si* $y_2 = x_2$*, alors* $\frac{\partial}{\partial y_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}$.

Exercice 6.7. Soient $p = (p_1, p_2)$ et $q = (q_1, q_2)$ deux points distincts de $\mathbb{R}^2$. Prouver que les fonctions $u(x, y) = d((x, y), (p_1, p_2))$ et $v(x, y) = d((x, y), (q_1, q_2))$ (où $d(\cdot, \cdot)$ est la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$) définissent un système de coordonnées curvilignes de classe C^∞ dans chacun des demi-plans limités par la droite passant par p et q. Décrire les lignes de coordonnées.

B. Exercices complémentaires

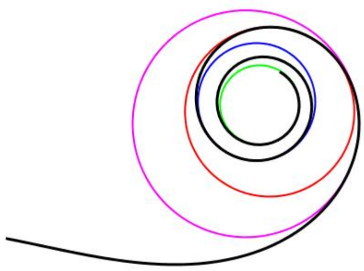
Exercice 6.8. (a) Rappeler à quelle condition on peut définir le cercle osculateur d'une courbe $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ en un point donné.

(b) Rappeler la définition du cercle osculateur.

(c) Comment trouve-t-on le centre et le rayon du cercle osculateur en un point donné de la courbe? Préciser dans quel plan ce cercle est contenu.

(d) Prouver le résultat suivant : *Soit* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *une courbe plane* C^3 *dont la courbure est* positive *et* strictement croissante. *Alors les cercles osculateurs* $\mathcal{C}(s)$ *à* α *sont emboîtés dans le sens suivant : Si* $s_1 < s_2$*, alors* $\mathcal{C}(s_2)$ *est contenu dans le disque bordé par* $\mathcal{C}(s_1)$*.*

Indications pour la question (d): Montrer d'abord que le rayon $\rho(s)$ de $\mathcal{C}(s)$ est une fonction décroissante de s. Puis montrer que la distance entre le centre de $\mathcal{C}(s_1)$ et $\mathcal{C}(s_2)$ est inférieure à la différence des rayons (pourquoi cela répond-il à la question?). Pour justifier cette dernière affirmation il est utile de supposer la courbe α paramétrée naturellement et de calculer la vitesse de $s \mapsto c(s)$ (la dérivée du centre $c(s)$ de $\mathcal{C}(s)$ se calcule facilement dans le repère de Frenet).



Exercice 6.9. (a) Soit $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe C^3 de longueur infinie dont la courbure est une fonction positive et strictement croissante. Prouver que la trace de cette courbe est bornée.
Pouvez vous donner une borne explicite (i.e. une constante C qui dépend du minimum de la courbure et telle que $\|\gamma(s) - \gamma(0)\| \leq C$ pour tout s ?)

(b) Montrer par un exemple que l'hypothèse de monotonie de la courbure est nécessaire. Plus précisément, montrer qu'il existe une courbe dont la courbure vérifie $k(s) \geq a > 0$ pour tout s et qui n'est pas bornée. (Il n'est pas nécessaire de produire une formule explicite, l'exemple peut simplement se dessiner).

Indication pour la question (a) : penser à l'exercice 6.7(d).

Exercice 6.10. Notons par $\gamma(s) = (x(x), y(s)) \in \mathbb{R}^2$ la chlotoïde paramétrée naturellement.
Pensez-vous que la limite

$$\lim_{s \to \infty} \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$$

existe ?

(Il s'agit de proposer un argument géométrique et non de calculer ou analyser les limites des intégrales de Fresnel; la question 6.7(d) est utile pour cet exercice).

A. Exercices standards.

Exercice 7.1. Le but de cet exercice est de prouver que la différentielle de l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ en $A \in M_n(\mathbb{R})$ est l'application linéaire $d\det_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ donnée par la formule

$$d\det_A(H) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(A)^\top H),$$

où $\mathrm{Cof}(A)$ est la matrice des cofacteurs de A.

On procède en trois étapes:

(1) Dans un premier temps démontrer la formule pour le cas $A = I$;

(2) Supposer ensuite que $A \in GL_n(\mathbb{R})$, i.e. que A est inversible;

(3) Finalement, conclure en utilisant le fait que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice $A + tI$ est inversible pour t suffisamment petit.

Exercice 7.2. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière plane de classe C^2 et $r \geq 0$. On appelle *courbe parallèle* à γ à distance r la courbe $\gamma_r(t) = \gamma(t) + r\mathbf{N}_\gamma(t)$ (où $\mathbf{N}_\gamma = \mathbf{J}(\mathbf{T}_\gamma)$ est le champ de vecteurs normal à γ).

(a) Calculer la courbure $\kappa_r(t)$ de la courbe parallèle γ_r (en fonction de r et de t).

(b) Montrer que la fonction $r \mapsto \kappa_r$ satisfait l'équation différentielle de Ricatti : $\dfrac{\partial \kappa}{\partial r} = \kappa^2$.

(c) Supposons que $q = \inf\limits_{t \in I} \dfrac{1}{|\kappa(t)|} > 0$. Montrer que l'application $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(r,t) = \gamma_r(t)$ est une immersion pour tout $\varepsilon \leq q$.

(d) Expliciter le cas du cercle de rayon a centré en 0.

(e) Expliquer pourquoi l'affirmation du point (c) n'est pas correcte pour $\varepsilon > q$.

Remarque. Cet exercice montre en particulier que localement, dans un voisinage de la courbe, on peut construire un système de coordonnées curviligne dont l'une des coordonnées est l'abscisse curviligne de la courbe et l'autre est la distance orientée à la courbe. Ces coordonnées s'appellent des *coordonnées de Fermi.*

Exercice 7.3. (Exercice sur les variétés de type quadrique)

(a) Rappeler ce qu'est une *forme quadratique* sur un espace vectoriel.

(b) Soit $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Prouver que Q est différentiable. Que vaut sa différentielle en un point $x \in \mathbb{R}^n$?

(c) Que dit le *théorème de Sylvester* de l'algèbre linéaire ? Qu'est-ce que la *signature* d'une forme quadratique ? Que signifie la condition Q *est non dégénéré* pour une forme quadratique ?

(d) Prouver que si $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée, alors l'hypersurface $Q^{-1}(c)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ pour tout $c \neq 0$. Quelle est sa dimension ?

(e) Est-ce que l'ensemble $S_0(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété ? *L'ensemble* $S_0(Q)$ *s'appelle le* cône isotrope *de la forme quadratique* Q

(f) Les hypersurfaces

$$S_+(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = +1\} \quad \text{et} \quad S_-(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = -1\}$$

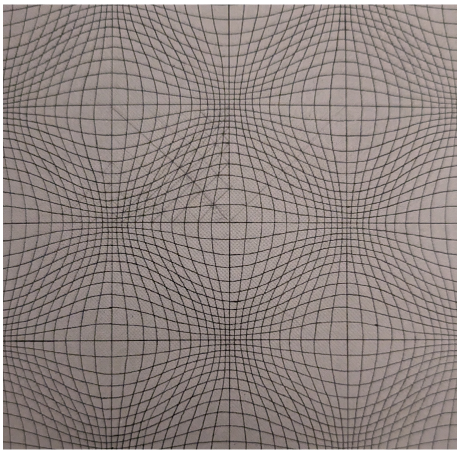
s'appellent les *indicatrices positives et négatives* de la forme quadratique Q. Montrer que Q est entièrement déterminé par les deux indicatrices et le cône isotrope, i.e. si Q_1 et Q_2 sont deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ telles que

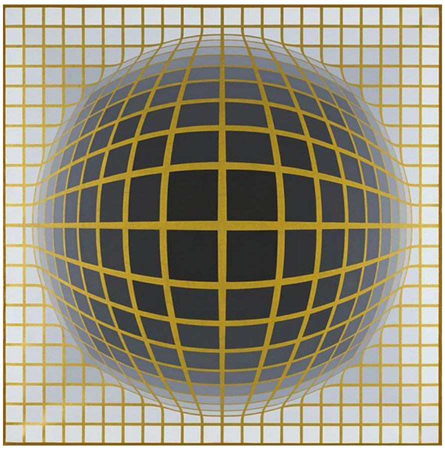
$$S_0(Q_1) = S_0(Q_2), \quad S_+(Q_1) = S_+(Q_2), \quad S_-(Q_1) = S_-(Q_2),$$

alors $Q_1 = Q_2$.

B. Exercices supplémentaires

Exercice 7.4. Cet exercice est à faire en groupe: Les images ci-dessous sont des créations des artistes Maurits Cornelis Escher en 1953 (à gauche) et Victor Vasarely en 1968 (à droite).
Expliquer à votre façon *en quoi on peut interpréter ces images comme représentant des systèmes de coordonnées curvilignes dans un domaine du plan* (discutez entre vous et rédigez un petit essai).





Exercice 7.5. (*) On note $\hat{\mathbb{R}}^n$ l'ensemble $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, où $\{\infty\}$ est un point supplémentaire qui n'appartient pas à $\mathbb{R}^n$. On définit sur cet ensemble une topologie pour laquelle $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\hat{\mathbb{R}}^n$ et la topologie induite est la topologie usuelle et les voisinages ouverts du point ∞ sont les ensembles du type $\mathbb{R}^n \setminus K$ où K est un compact de $\mathbb{R}^n$.

On considère ensuite l'application $f := \hat{\mathbb{R}}^n \to \hat{\mathbb{R}}^n$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = p, \\ p & \text{si } x = \infty, \\ p + k\dfrac{x-p}{\|x-p\|^2} & \text{si } x \notin \{p, \infty\}. \end{cases}$$

où p est un point de $\mathbb{R}^n$ et k est un réel strictement positif. Cette application s'appelle l' *inversion de centre $p \in \mathbb{R}^n$ et de module $k > 0$, c'est une application qui joue un rôle important en géométrie et en analyse.*

Répondre aux questions suivantes :

(a) Décrire toutes les suites convergentes de $\hat{\mathbb{R}}^n$ (on ne demande pas de donner une preuve rigoureuse mais seulement d'expliquer quelles sont les suites convergentes).

(b) Décrire l'ensemble des points fixes de f, c'est-à-dire l'ensemble $\{x \in \hat{\mathbb{R}}^n \mid f(x) = x\}$.

(c) Prouver que f est un homéomorphisme de $\hat{\mathbb{R}}^n$. Quel est son inverse ?
Prouver aussi que f définit par restriction un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ dans lui-même.

(d) Prouver que si $n = 2$, f définit une application anti-holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{p\}$.

(e) Calculer la différentielle $df_x(h)$ en un point $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$.

(f) Prouver que f est une application conforme sur $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ (une application est dite *conforme* si elle préserve les angles, concrètement il s'agit de prouver que df_x est une similitude de $\mathbb{R}^n$).

(g) Quel est le rapport de similitude de $df_x(h)$?

Cet exercice est important d'une part parce que l'inversion est une application importante en géométrie, et d'autre part parce qu'il donne l'occasion de s'entraîner au calcul différentiel.

A. Exercices standards.

Exercice 8.1. On considère les fonctions suivantes : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = x^2 y + 2\,x^2 - 2\,xy - 4\,x + y \quad \textbf{et} \quad g(x, y, z) = 2xy - 3yz.$$

(a) Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{R}$ la courbe de niveau $f^{-1}(c)$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

(b) Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{R}$ la surface de niveau $g^{-1}(c)$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8.2. (a) Soit $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ un point régulier de la surface S surface définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$. Prouver que le plan vectoriel tangent T_pS est le plan orthogonal au gradient $\vec{\nabla} f(p)$.

(b) Le *plan affine tangent* à une surface S en un point régulier p est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ tels que le vecteur $\overrightarrow{pq} \in T_pS$. Montrer que le plan affine tangent est donné par

$$A_pS = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \langle q - p, \vec{\nabla} f(p)\rangle = 0\}.$$

(c) En appliquant le résultat précédent, obtenir la formule donnant l'approximation du premier ordre d'une fonction différentiable de deux variables $z = \varphi(x, y)$ au voininage d'un point (x_0, y_0) (série de Taylor à l'ordre 1).

Exercice 8.3. Montrer que l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ est une surface régulière (i.e. une sous-variété de dimension 2) et calculer son plan affine tangent en un point $p = (x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 8.4. On dit que deux sous-variétés différentiables M_1 et M_2 de $\mathbb{R}^n$ *s'intersectent transversalement* en un point p si $p \in M_1 \cap M_2$ et en ce point les espaces tangents vérifient $T_pM_1 + T_pM_2 = \mathbb{R}^n$.

(a) Donner un exemple d'une surface et d'une courbes régulières $\mathbb{R}^3$ qui s'intersectent en un point unique, mais de façon non transverse.

(b) Montrer que si S est une surface et C une courbe de $\mathbb{R}^3$ (toutes deux régulières), qui s'intersectent transversalement en $0 \in \mathbb{R}^3$, alors on peut construire un système de coordonnées locales (u, v, t) au voisinage de 0 telles que (u, v) sont des paramètres locaux de la surface S et t un paramètre local de la courbe C.

(c) Dans la même situation que en (b), prouver que 0 est un point isolé de l'intersection $S \cap C$ (i.e. il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^3$ tel que $V \cap S \cap C = \{0\}$).

Remarque : Dire qu'une courbe ou une surface est *régulière* signifie qu'elle est une sous-variété de classe C^k, avec $k \geq 1$.

Exercice 8.5. La *fenêtre de Viviani* est la courbe d'intersection d'une sphère avec un cylindre circulaire droit qui passe par le centre de la sphère et dont le diamètre est le rayon de la sphère. Si le rayon de la sphère est 1, on peut donc admettre (quitte à appliquer une isométrie) que la fenêtre de Viviani est définie par les équations:

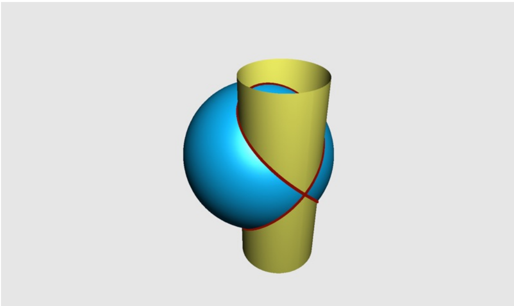
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \textbf{et} \qquad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

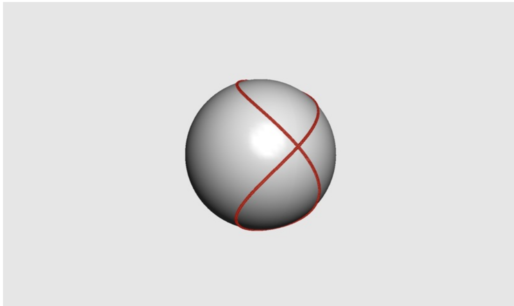
On notera cet ensemble V.

(a) Montrer par un argument géométrique qu'il existe un point $q \in V$ tel que le complémentaire $V \setminus \{q\}$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^3$. Quel sont les coordonnées de q (on admettra un argument heuristique) ?

(b) Prouver rigoureusement à partir des équations de V que $V \setminus \{q\} \subset \mathbb{R}^3$ est une sous-variété différentiable.

(c) Trouver une paramétrisation régulière de cette courbe.





B. Exercices supplémentaires.

Exercice 8.6. On a vu à l'exercice 7.3 que $O(n)$ et $SL_n(r)$ sont des sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

a) Décrire l'espace tangent $T_I SL_n(\mathbb{R})$ à la sous-variété $SL_n(r) \subset M_n(\mathbb{R})$ au point I (= la matrice identité).

b) Décrire l'espace tangent $T_I O(n)$ à la sous-variété $O(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ au point I.

A. Exercices standards.

Exercice 9.1. (Courbe comme intersection de deux surfaces). Notons $\mathcal{C} \subset \Omega$ l'ensemble des points de Ω tels que

$$f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0,$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^3$ et $f, g \in C^k(\Omega)$ avec $k \geq 1$. Supposons que pour un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$$

est de rang 2.

(a) Expliquer pourquoi on peut paramétriser l'ensemble $\mathcal{C}$ dans un voisinage de (x_0, y_0, z_0) comme courbe régulière $\gamma : I \to \Omega$ de classe C^k.

(b) Que peut-on dire du vecteur tangent $\dot{\gamma}(t)$?

Exercice 9.2. Rappelons que par définition une application $f : M \to N$ entre deux sous-variétés différentiables est un *difféomorphisme* si elle est bijective et f ainsi que f^{-1} sont différentiables.

(a) Prouver que pour tout $p \in M$, la différentielle $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(b) En déduire qu'il n'existe aucun difféomorphisme entre deux variétés non vides qui n'ont pas la même dimension.

(c) Montrer par un exemple qu'une application différentiable bijective $f : M \to N$ entre deux sous-variétés différentiables n'est pas toujours un difféomorphisme (ont peut supposer $\dim(M) = 1$).

Exercice 9.3. (a) On a vu à précédemment que $O(n)$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. Décrire l'espace tangent $T_IO(n)$ de cette variété au point I (= la matrice identité).

(b) Prouver que $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

(c) Décrire l'espace tangent $T_ISL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9.4. Une surface est dite *réglée* si c'est une réunion de droites. De façon plus précise, soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe C^1 et $\mathbf{b} : I \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 le long de γ. La surface réglée associée est définie par la paramétrisation:

$$\psi(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{b}(u).$$

(a) Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface réglée ainsi définie soit en effet une surface régulière localement (c'est-à-dire pour que l'application ψ soit une immersion).

(b) Soit $\mathcal{C}$ une courbe de $\mathbb{R}^3$. On appelle *cône de sommet* $q \in \mathbb{R}^3$ *et de base* $\mathcal{C}$ la réunion des droites passant par q et un point de $\mathcal{C}$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un cône soit une surface régulière au voisinage de sa base. Puis expliciter une paramétrisation de ce cône.

(c) Expliquer ce qu'est un ruban de Möbius et donner une paramétrisation de cette surface comme surface réglée dans $\mathbb{R}^3$.

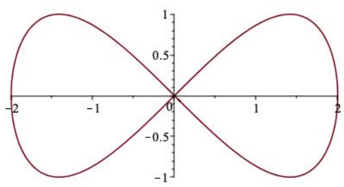
Exercice 9.5. Montrer que l'hyperboloïde $\mathcal{H}$ à une nappe $x^2+y^2-z^2=1$ est une surface doublement réglée (i.e. réglée de deux manières différentes), puis donner une paramétrisation régulière de cette surface basée sur l'un de ces réglages.

Indication : Ecrire l'équation sous la forme $x^2-1=z^2-y^2$ et factoriser. En déduire algébriquement l'équation d'une droite contenue dans $\mathcal{H}$, puis la paramétrer et la faire tourner autour de l'axe Oz.

B. Exercice supplémentaire.

Exercice 9.6. Dans cet exercice nous construisons un exemple d'immersion injective qui n'est pas un plongement.
La *lemniscate de Gerono* est la courbe plane définie par l'équation $4x^2-4y^2-x^4=0$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2-4y^2-x^4=0\}.$$



(a) Montrer que $\mathcal{C}$ n'est pas une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^2$.

(b) La restriction de cette courbe à $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est-elle une sous-variété différentiable ?

(c) Vérifier que $\gamma:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t)=(2\cos(t),\sin(2t))$ est une paramétrisation régulière de $\mathcal{C}$.

De façon précise, démontrer que

(i) γ est une immersion de l'intervalle ouvert $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ dans le plan.

(ii) γ est injective.

(iii) γ défini une bijection entre l'intervalle ouvert $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ et la courbe $\mathcal{C}$.

(iv) Expliquer ce qu'il se passe sur γ lorsque $t\to-\frac{\pi}{2}$ et $t\to+\frac{3\pi}{2}$.

(v) Prouver que γ n'est pas un plongement de l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ dans le plan. (c'est-à-dire que ça n'est pas un homéomorphisme sur son image).

Objectifs pour cette semaine : Le premier exercice relie le volume d'un parallélépipède à la matrice de Gram. Les autres exercices portent sur des notions de géométrie intrinsèque des surfaces.

Exercice 10.1. Expliquer pourquoi le volume du parallélépipède $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^m$ construit sur les vecteurs $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^m$ vérifie

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{P}) = \sqrt{\det(\mathbf{G})},$$

où $\mathbf{G}$, est la matrice de Gram de $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ (c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les produits scalaires $g_{ij} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle$).

Exercice 10.2. (a) Donner un domaine ouvert maximal sur lequel les coordonnées polaires définissent un difféomorphisme $\psi : (r, \theta) \to (x, y)$.

(b) Calculer le tenseur métrique associé.

(c) En déduire la formule pour calculer l'aire d'un domaine en coordonnées polaires.

Exercice 10.3. Considérons l'hélicoïde définie par

$$S = \{(x, yz) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x \sin(z) - y \cos(z) = 0\}$$

(a) Prouver que l'hélicoïde est une surface réglée et décrire la géométrie de cette surface.

(b) Montrer que l'application

$$\psi(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), u)$$

défini un diféomorphisme (global) entre $\mathbb{R}^2$ et S.

(c) Calculer ensuite le tenseur métrique associé à ce paramétrage.

Exercice 10.4. Prouver que l'aire d'une surface paramétrée régulière $\psi : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^1 peut se calculer par la formule

$$\mathrm{Aire}(S) = \iint_\Omega \|\tfrac{\partial \vec{\psi}}{\partial u} \times \tfrac{\partial \vec{\psi}}{\partial v}\| du dv$$

Exercice 10.5. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 que l'on suppose strictement positive. Notons S la surface de révolution dans $\mathbb{R}^3$ obtenue par rotation du graphe de f autour de l'axe Ox. Prouver soigneusement que

$$\mathrm{Aire}(S) = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot |f(x)| \, dx.$$

Exercice 10.6. La *chaînette* est le graphe du cosinus hyperbolique, c'est-à-dire la courbe $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$.

(a) Expliquer pourquoi cette courbe s'appelle ainsi (une petite recherche sur internet n'est pas interdite).

(b) Montrer que la courbure de α est donnée par $\kappa(t) = 1/\cosh(t)^2$.

(c) Calculer la développée de α.

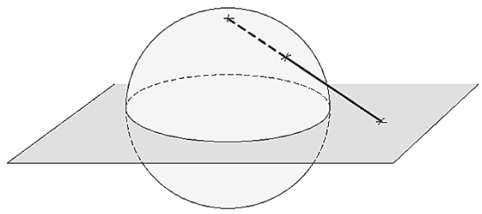
(d) Calculer l'abscisse curviligne de la chaînette depuis le point initial $\alpha(0) = (0, 1)$, puis donner la paramétrisation naturelle de α.

(e) La surface de révolution de la chaînette autour de l'axe Ox s'appelle une *caténoïde.* Calculer le tenseur métrique de la caténoïde (en préférant la paramétrisation naturelle de la chaînette).

Exercice 10.7. Soit $S_a \subset \mathbb{R}^3$ la sphère de rayon $a > 0$ centrée en l'origine. On appelle *projection stéréographique* l'application

$$\pi : S_a \setminus \{(0, 0, a)\} \to \mathbb{R}^2$$

qui envoie un point $p = (x, y, z) \in S_a$ ($p \neq (0, 0, a)$) sur l'unique point q du plan $\mathbb{R}^2$ tel que les trois points $(0, 0, a)$, p et q sont alignés (on regarde $\mathbb{R}^2$ comme un plan dans $\mathbb{R}^3$.)



Notons $\psi : \mathbb{R}^2 \to S_a$ l'application inverse de la projection stéréographique.

(a) Trouver une formule explicite pour ψ et montrer que ψ est un paramétrage régulier de $S_a \setminus \{(0, 0, a)\}$.

(b) Calculer le tenseur métrique associé à cette paramétrisation.

(c) Cette paramétrisation est-elle conforme ?

(d) Prouver que la projection stéréographique définit un homéomorphisme entre la sphère et le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^2$.
(Le *compactifié d'Alexandrov* de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble $\widehat{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ muni de la topologie pour laquelle tout voisinage d'un point q de $\mathbb{R}^2$ est aussi un voisinage de q dans $\widehat{\mathbb{R}^2}$ et les complémentaires des parties compactes de $\mathbb{R}^2$ forment une base de voisinage du point ∞).

Remarque. Parfois on définit la projection stéréographique en projetant sur un autre plan que le plan de l'équateur, en particulier on projette souvent sur la plan tangent au "pôle sud" $(0, 0, -a)$.

A. Exercices standards.

Exercice 11.1. Soit $\gamma(s) \in \mathbf{R}^3$ $(a \leq s \leq b)$ une courbe régulière au sens de Frenet et $\varepsilon > 0$ une (petite) constante. La réunion des cercles de rayons ε centré en $\gamma(s)$ et contenus dans le plan orthogonal à $\dot{\gamma}(s)$ est une surface. On l'appelle un ε-tube autour de γ (ainsi un cylindre ou un tore sont des exemples simples de tubes.)

a) En supposant que γ est paramétrisée naturellement et birégulière, donner un paramétrage $\psi(s, \theta)$ du ε-tube (on utilisera le repère de Frenet).

b) Calculer le tenseur métrique de ce paramétrage.

c) Montrer que l'aire de ce tube est donnée par

$$A = 2\pi\varepsilon L$$

où L est la longueur de γ.

d) Observer que cette formule est surprenante : l'aire du tube ne dépend que de ε et de la longueur de la courbe γ au centre du tube. Donner néanmoins une explication intuitive de ce phénomène.

Exercice 11.2. Soit $\gamma : I \to \mathbb{S}^2$ une courbe simple de classe C^1 tracée sur la sphère unité, on suppose γ paramétrée naturellement. On considère le cône $\mathcal{C}$ de centre 0 engendré par cette courbe, c'est à dire l'ensemble des demi-droites d'origine 0 et passant par un point de γ.

(a) Donner une paramétrisation de $\mathcal{C}$ comme surface réglée et montrer que $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer le tenseur métrique pour cette paramétrisation.

(c) Montrer que $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ est localement isométrique au plan euclidien.

Exercice 11.3. Une courbe $\gamma : I \to S$ de classe C^2 tracée sur une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est une *géodésique* de cette surface si son accélération est normale à la surface pour tout t (c'est à dire $\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}S$ pour tout $t \in I$.)

Démontrer les affirmations suivantes :

(a) La vitesse de toute géodésique est constante.

(b) Les géodésiques (non constante) d'une sphère sont les grand cercles de cette sphère paramétrés à vitesse constante.

(c) Si γ est un méridien d'une surface de révolution S et γ est parcourue à vitesse constante, alors γ est une géodésique.

(d) A quelle condition un parallèle d'une surface de révolution est-elle une géodésique ?

Indication pour (b) : Soit $\gamma(t)$ une géodésique d'une sphère de centre c. Vérifier que le vecteur $m := (\gamma(t) - c) \times \dot{\gamma}$ est constant, puis considérer le produit scalaire $\langle \gamma(t) - c, m \rangle$.

Exercice 11.4. (a) On note $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ l'hélicoïde d'équation $x\sin(z) = y\cos(z)$ et $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ le cylindre circulaire droit d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Montrer que l'intersection de ces deux surfaces est la réunion disjointe des images des deux hélices $\gamma_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ suivantes :

$$\gamma_+(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \qquad \gamma_-(t) = (-\cos(t), -\sin(t), t),$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{H} \cap \mathcal{C} = \gamma_+(\mathbb{R}) \cup \gamma_-(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \gamma_+(\mathbb{R}) \cap \gamma_-(\mathbb{R}) = \emptyset.$$

(en particulier l'intersection $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}$ possède deux composantes connexes).

(b) $\gamma_\pm(t)$ est-elle une géodésique du cylindre ?

(c) $\gamma_\pm(t)$ est-elle une géodésique de l'hélicoïde ?

Exercice 11.5. Calculer explicitement l'application de Gauss $\nu : \mathcal{E} \to \mathbb{S}^2$ de l'ellipsoïde donné sous forme implicite par

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} + \tfrac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Il s'agit donc de donner une formule pour $\nu = \nu(x, y, z)$ pour chaque point $(x, y, z) \in \mathcal{E}$ (on suppose a, b, c non nuls).

Que remarque-t-on dans le cas où $a = b = c = 1$ (i.e. lorsque $\mathcal{E}$ est la sphère unité).

Exercice 11.6. Soit $\gamma : I \to S$ une courbe régulière de classe C^2 tracée sur une surface régulière co-orientée $S \subset \mathbb{R}^3$. On appelle *repère de Darboux* le long de γ relatif à la surface S le repère mobile orthonormé $\{\boldsymbol{\nu}(t), \mathbf{T}_\gamma(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ où $\mathbf{T}_\gamma(t) = \frac{1}{V_\gamma(t)}\dot\gamma(t)$ est le vecteur tangent unitaire à γ, $\boldsymbol{\nu}(t)$ est l'application de Gauss de S évaluée en $\gamma(t)$ et $\boldsymbol{\mu}(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \times \mathbf{T}_\gamma(t)$.

On note $\mathbf{K}_\gamma(t)$ le vecteur de courbure de γ. On rappelle que la *courbure normale* et la *courbure géodésique* de γ sont les fonctions du paramètre t définies respectivement par

$$k_n(t) = \langle \mathbf{K}_\gamma(t), \boldsymbol{\nu}(t) \rangle \qquad \text{et} \qquad k_g(t) = \langle \mathbf{K}_\gamma(t), \boldsymbol{\mu}(t) \rangle.$$

(a) Montrer que $\kappa(t)^2 = k_n(t)^2 + k_g(t)^2$, où κ est la courbure de γ (en tant que courbe de $\mathbb{R}^3$).

(b) Prouver que γ est géodésique si et seulement si sa vitesse est constante et sa courbure géodésique est nulle.

(c) Calculer le repère de Darboux, la courbure géodésique et la courbure normale du petit cercle sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$ défini par les équations $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $z = c$ (où $-1 < c < 1$).

Exercice 11.7. On continue avec la situation et les notations de l'exercice précédent, et on définit la *torsion géodésique* de γ par

$$\tau_g(t) = \tfrac{1}{V_\gamma(t)} \langle \dot{\boldsymbol{\nu}}(t), \boldsymbol{\mu}(t) \rangle.$$

(c) Calculer la torsion géodésique du petit cercle sur $\mathbb{S}^2$ défini $\{z = c\}$.

(d) Prouver que le repère de Darboux vérifie les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{V}\dot{\mathbf{T}} &= k_g\boldsymbol{\mu} + k_n\boldsymbol{\nu}, \\ \frac{1}{V}\dot{\boldsymbol{\nu}} &= -k_n\mathbf{T} + \tau_g\boldsymbol{\mu}, \\ \frac{1}{V}\dot{\boldsymbol{\mu}} &= -k_g\mathbf{T} - \tau_g\boldsymbol{\nu}, \end{cases}$$

B. Exercice supplémentaire

Exercice 11.8. Lire les chapitres 3 et 4 du livre *La Science et l'Hypothèse* (de Henri Poincaré, 1902). Disponible ici en version électronique :
`https://www.ebooksgratuits.com/pdf/poincare_science_hypothese.pdf`

C. Illustrations

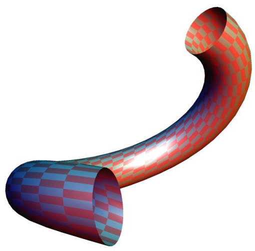


Figure 2: ε-tube autour d'une courbe.

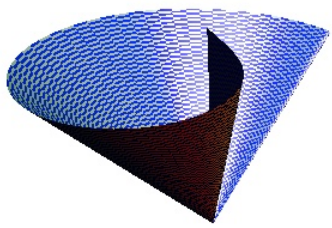


Figure 3: Cône généralisé.

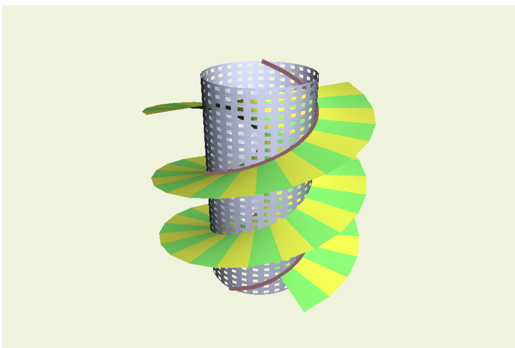


Figure 4: Intersection d'une demi-hélicoïde et d'un cylindre circulaire droit

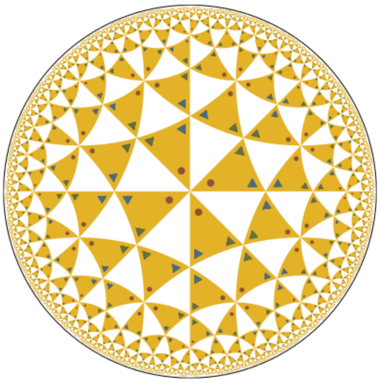


Figure 5: Pavage hyperbolique du disque de Poincaré. Tous les triangles ont la même aire.

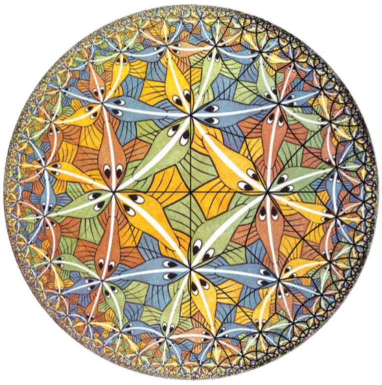


Figure 6: Cette représentation par M.C. Escher du plan hyperbolique –appelée Circle Limit III– date de 1959; l'artiste avait fait la connaissance du mathématicien H.C. Coxeter, qui lui avait envoyé un article contenant une figure de pavage hyperbolique.

Objectifs. Cette série a pour but d'explorer la courbure des surfaces et les différentes notions qui apparaissent dans cette théorie; et comprendre comment calculer ces courbures.

A. Exercices standards.

Exercice 12.1. Prouver que si γ est une courbe birégulière de classe C^2 qui est géodésique d'une surface coorientée S, alors la torsion de γ (en tant que courbe dans $\mathbb{R}^3$) coïncide au signe près avec la torsion géodésique de cette courbe (ce résultat explique la terminologie de *torsion géodésique*).

La réciproque de cet énoncé est-elle valable (i.e. est-ce qu'une courbe sur une surface telle que la torsion géodésique est égale à la torsion est toujours une géodésique de cette surface) ?

Indication. Dans cet exercice il est utile de comparer les équations de Darboux et de Serret-Frenet pour la courbe γ.

Exercice 12.2. Calculer la courbure moyenne et la courbure de Gauss du cylindre circulaire droit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x^2 + y^2 = a^2$. (Peut-on prédire ces valeurs sans faire de calculs ?).

Exercice 12.3. (a) Calculer le tenseur métrique, la deuxième forme fondamentale et l'application de Weingarten de l'hélicoïde

$$\psi(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), u).$$

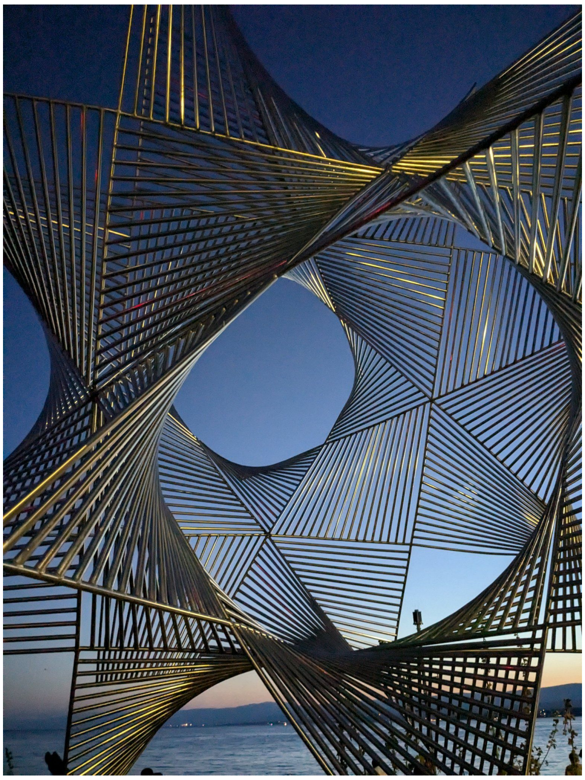


Figure 7: Cette sculpture est l'œuvre du sculpteur A. Duarte et date de 1973. On peut l'admirer au bout de la jetée à Ouchy. Elle est constituées de plusieurs surfaces réglées, ce qui semblait être un thème à la mode à cette époque..

(b) Que valent la courbure moyenne et la courbure de Gauss de cette surface ?

Exercice 12.4. Montrer que la matrice de la seconde forme fondamentale du graphe de la fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, de classe C^2 (où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^2$) est

$$H = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}} \begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} \end{pmatrix}$$

Exercice 12.5. Est-ce que la matrice de l'application de Weingarten d'une surface est toujours une matrice symétrique ?

Exercice 12.6. Soit p un point non ombilique d'une surface régulière de classe C^2. On note $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ les vecteurs unités de T_pS dans les direction principales. Prouver la *formule d'Euler*, qui dit que la courbure normale du vecteur $\mathbf{v}_\theta = \cos(\theta)\mathbf{v}_1 + \sin(\theta)\mathbf{v}_2 \in T_pS$ est donnée par

$$k_n(\mathbf{v}_\theta) = k_1 \cos(\theta)^2 + k_2 \sin(\theta)^2,$$

où k_1, k_2 sont les courbures principales de S en p.
En déduire que k_1 et k_2 sont les valeurs minimale et maximale de la courbure normale de S au point p.
(On rappelle qu'un point de la surface S est dit *ombilique* si les deux courbures principales en ce point coïncident : $k_1 = k_2$).

B. Exercice supplémentaire (sur les géodésiques des surfaces de révolution).

Exercice 12.7. Le but est de cet exercice est de déterminer toutes les géodésiques des surfaces de révolution. On considère la surface de révolution $\psi : \Omega = [0, 2\pi] \times I \to S \subset \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\psi(\theta, s) = (r(s)\cos(\theta), r(s)\sin(\theta), z(s))$$

(a) On considère une courbe $\gamma(t)$ $(t \in J)$, de classe C^2 tracée sur la surface S. Montrer que pour tout $t \in J$ on a

$$\langle \ddot{\gamma}(t), \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rangle = \frac{d}{dt}\left(r^2 \dot{\theta}(t)\right),$$

où le point signifie la dérivée par rapport au paramètre t.

(b) Montrer que si $\gamma(t)$ est une géodésique, alors les quantités

$$r^2(t)\dot{\theta}(t) \qquad \text{et} \qquad (r(t)\dot{\theta}(t))^2 + \dot{r}(t)^2 + \dot{z}(t)^2$$

sont constantes (indépendante de t).

(c) Montrer que la fonction $t \mapsto 1/r(t)$ est bornée pour toute géodésique qui n'est pas un méridien de la surface de révolution.

(d) Montrer que la hauteur de toute géodésique dans la pseudo-sphère qui n'est pas un méridien est une courbe bornée dans $\mathbb{R}^3$.

Indication pour (c). On peut calculer la vitesse et l'accélération de γ en coordonnées cylindriques.

Objectifs. Dans cette série, on continue l'étude des courbes sur les surfaces et les différentes notions de courbure. Il s'agit en particulier de se familiariser avec les méthodes de calculs, tout en faisant le lien avec la géométrie des surfaces.

A. Exercices standards.

Exercice 13.1. Calculer le tenseur métrique, la deuxième forme fondamentale et l'application de Weingarten de la caténoïde i.e. la surface de révolution de la chainette $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$.
On rappelle que cette surface peut se paramétriser ainsi (comme surface de révolution autour de l'axe Ox) :

$$\psi(s,\theta) = \Big(\log(s + \sqrt{1+s^2}), \sqrt{1+s^2}\cos(\theta), \sqrt{1+s^2}\sin(\theta)\Big).$$

Que valent la courbure moyenne et la courbure de Gauss de cette surface ?

Exercice 13.2. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface de classe C^2 dont on note H et K les courbures moyenne et de Gauss respectivement. Montrer que les courbures principales sont données par

$$k_1, k_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Exercice 13.3. Montrer que la courbure de Gauss et la courbure moyenne peuvent s'écrire en fonction des coefficients (g_{ij}) et (h_{ij}) des deux formes fondamentales par

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \qquad \text{et} \qquad H = \frac{g_{11}h_{22} - 2\,g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}.$$

Exercice 13.4. Soit $\psi_1 : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière de classe C^2 et $\lambda > 0$. On note $\psi_2 = \lambda\psi_1 : \Omega \to \lambda S \subset \mathbb{R}^3$ la surface obtenue en appliquant une homothétie de rapport λ. Quelle est la relation entre la courbure de Gauss $K_1(u,v)$ en un point $p = \psi_1(u,v)$ de S et la courbure de Gauss $K_2(u,v)$ en un point $q = \lambda p = \psi_2(u,v)$ de λS ?

Exercice 13.5. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^3 birégulière. Prouver que si $\|\dot\gamma\|$ est constante, alors γ est une géodésique de la surface réglée S de paramétrisation $\psi(u,v) = \gamma(u) + v\mathbf{B}_\gamma(u)$, où $\mathbf{B}_\gamma(u)$ est le vecteur binormal de γ.

Exercice 13.6. Une courbe régulière γ de classe C^2 sur une surface S est une *ligne de courbure* si sa courbure normale est en tout point une courbure principale.
Montrer que γ est une ligne de courbure si et seulement si sa torsion géodésique est nulle.

Exercice 13.7. Prouver que la courbure de Gauss d'une surface réglée S est ≤ 0 (pas besoin de faire de calculs).

Exercice 13.8. Prouver que la caténoïde et l'hélicoïde sont localement isométriques.

Remarque. Le fait que la caténoïde et l'hélicoïde sont localement isométriques impliquent que ces deux surfaces ont la même courbure de Gauss, à cause du théorème egregium, ce que confirment les calculs.

Voici deux vidéos intéressantes illustrant l'isométrie entre la caténoïde et l'hélicoïde :
`https://www.youtube.com/watch?v=VRY42CogW0I`

et ici : `https://www.youtube.com/shorts/RYHxW8GTQgQ`

B. Exercice supplémentaire

Exercice 13.9. Montrer que la pseudo-sphère de Beltrami est intrinsèquement isométrique au demi-plan de Poincaré. Puis calculer son aire

---

A noter : Sur Moodle, dans la rubrique "vidéos" il y a un lien vers une vidéo de K. Crane présentant un panorama assez complet de la courbure des courbes et des surfaces. Cette vidéo est de grande qualité mais aussi très dense, à regarder en petites tranches. Les première 55-60 minutes recouvrent des thèmes vus au cours, ensuite la vidéo illustre d'autres thèmes.

La vidéo se trouve aussi ici : `https://www.youtube.com/watch?v=e-erMrqBd1w`

Le premier exercice étudie une classe de courbes sur les surfaces et dans le second, on calcule l'intégrale de la courbure gaussienne du tore de révolution. On finit avec un exercice de révision sur la courbure des courbes planes.

Exercice 14.1. Une courbe régulière $\gamma : I \to S$ tracée sur une surface régulière coorientée $S \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^2 s'appelle une *ligne asymptotique*[2] si elle est de classe C^2 et son vecteur de courbure est tangent à la surface pour tout $t \in I$.

Prouver que les affirmations suivantes sont équivalentes:

(a) La courbe γ est une ligne asymptotique de S.

(b) La courbure normale k_n de γ est identiquement nulle.

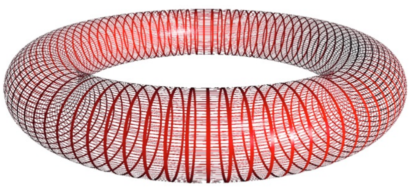
(c) $h(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ pour tout $t \in I$, où h est la seconde forme fondamentale de S.

(d) En tout point de la courbe, le vecteur binormal de γ est égale, au signe près, au vecteur de coorientation de la surface.

(e) Le plan osculateur à γ coïncide avec le plan affine tangent en S en chaque point de γ.

(Pour les points (d) et (e) on suppose que la courbe est régulière au sens de Frenet).

Exercice 14.2. On note $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ le tore obtenu en faisant tourner le cercle de rayon 1 et de centre $(a, 0, 0)$ du plan Oxz autour de l'axe Oz (on suppose que $a > 1$).



a) Donner une paramétrisation du tore $\mathcal{T}$ et calculer le tenseur métrique associé.

b) Calculer l'aire de la surface $\mathcal{T}$.

c) Calculer la courbure de Gauss K de $\mathcal{T}$ (on exprimera K comme fonction des paramètres de la paramétrisation donnée en (a)).

d) Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_{\mathcal{T}} K dA$.

Exercice de révision :

[2] La terminologie est justifiée par le fait que le vecteur vitesse d'une ligne de courbure est en direction d'une asymptote de l'indicatrice de Dupin, qui est l'ensemble des vecteurs $v \in T_pS$ tels que $|h(v, v)| = 1$ (mais ceci n'influence pas l'exercice).

Exercice 14.3. (a) Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée de classe C^2 dans le plan orienté. On suppose que sa courbure orientée, que l'on note k, vérifie $0 \leq k(t) \leq C$ pour tout $t \in [a, b]$.

Démontrer que la longueur ℓ de γ vérifie $\ell \geq 2\pi/C$.

(b) Est-ce que cette borne peut-être atteinte, i.e. existe-t-il une courbe fermée γ de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $k(t) = 2\pi/\ell(\gamma)$ pour tout t ?