EPFL - Automne 2024	M. Troyanov
MATH 213: Géométrie Différentielle	**Exercices**
Série 4	3.10.2024

A. Exercices standards.

Exercice 4.1. Si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, on dit que le vecteur $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ est la *composante normale* de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ selon $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ si $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}$. Montrer que cette composante normal peut s'écrire

$$\mathbf{c} = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

Exercice 4.2. Démontrer que le vecteur (unitaire) tangent et le vecteur de courbure d'une courbe régulière de classe C^2 sont des notions géométriques, i.e. ces champs de vecteurs sont invariants par reparamétrisation directe.

Exercice 4.3. Nous avons défini le *vecteur normal principal* $\mathbf{N}_\alpha$ et le *vecteur de courbure* $\mathbf{K}_\alpha$ d'une courbe birégulière α de classe C^2 par

$$\mathbf{N}_\alpha = \frac{\ddot{\alpha} - \langle \ddot{\alpha}, \mathbf{T}_\alpha \rangle \mathbf{T}_\alpha}{\|\ddot{\alpha} - \langle \ddot{\alpha}, \mathbf{T}_\alpha \rangle \mathbf{T}_\alpha\|} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{K}_\alpha = \frac{1}{\|\dot{\alpha}\|}\dot{\mathbf{T}}_\alpha.$$

Prouver que $\mathbf{K}_\alpha = \kappa_\alpha \mathbf{N}_\alpha$, où $\kappa_\alpha = \|\mathbf{K}_\alpha\|$ est la courbure de α.

Exercice 4.4. Prouver que la courbe $\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$ est birégulière, puis calculer son vecteur de courbure et sa courbure (la courbure est la norme du vecteur de courbure).

Exercice 4.5. Prouver la formule suivante qui donne la courbure d'une courbe régulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2 dans $\mathbb{R}^3$:

$$\kappa_\gamma(u) = \frac{\|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)\|}{V_\gamma^3}.$$

Exercice 4.6. La *développée* d'une courbe birégulière $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est la courbe $\beta : I \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\beta(u) = \alpha(u) + \frac{1}{\kappa_\alpha(u)}\mathbf{N}_{\alpha_u}$$

où $\rho_\alpha(u) = \frac{1}{\kappa_\alpha(u)}$ est le *rayon de courbure* et $\mathbf{N}_{\alpha_u}$ est le vecteur normal principal. La développée d'une courbe est donc le lieu géométrique de ses centres de courbure (= centre du cercle osculateur).

Calculer les développées des courbes suivantes:

(a) Un cercle dans $\mathbb{R}^n$.

(b) Une droite dans $\mathbb{R}^n$.

(c) L'hélice circulaire droite$\alpha(u) = (a\cos(u), a\sin(u), b\,u)$ dans $\mathbb{R}^3$.

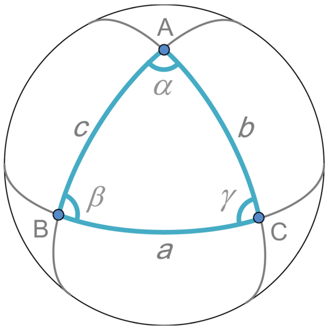
(d) La cycloïde $\gamma(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))$ dans $\mathbb{R}^2$.

Prouver que la développée de l'hélice est de nouveau une hélice et que la développée de la cycloïde est aussi une cycloïde.

Exercice 4.7. Sans faire aucun calcul, dessiner (approximativement) une ellipse et sa développée. Expliquer votre raisonnement.

On appelle *triangle sphérique* la donnée de trois points A, B, C sur une sphère S, avec les arcs de grand-cercles a (reliant B et C), b (qui relie A et C) et c (qui relie A et B). Ces arcs de grand-cercles sont les *côtés* du triangle sphérique. On note α l'angle formé par les arcs b et c au point A, de même on note β l'angle en B et γ l'angle en C.

Rappelons qu'on appelle *grand-cercle* sur une sphère, un cercle formé par l'intersection de cette sphère avec un plan passant par le centre de la sphère. Les autres cercles tracés sur la sphère sont les *petit-cercles*. Deux points sur une sphère sont toujours reliés par deux arcs de grand-cercles; dans la détermination d'un triangle sphérique, on ne considère que le plus petit de ces deux arcs.



Exercice 4.8. Par abus de notations, nous notons aussi par a, b, et c les longueurs des côtés du triangle sphérique. Démontrer la formule de trigonométrie sphérique suivante:

$$\cos\left(\frac{c}{r}\right) = \cos\left(\frac{a}{r}\right)\cos\left(\frac{b}{r}\right) + \sin\left(\frac{a}{r}\right)\sin\left(\frac{b}{r}\right)\cos(\gamma),$$

où r est le rayon de la sphère.

Exercice 4.9. La distance sphérique $d_S(A, B)$ entre deux points A et B sur une sphère S est par définition la longueur de l'arc de grand cercle reliant ces deux points.

Montrer à partir de la trigonométrie sphérique que d_S vérifie bien toutes les propriétés d'une distance.

B. Exercice complémentaire (ne fera pas partie du champ de l'examen).

Exercice 4.10. Le but de cet exercice est de montrer qu'on peut (re)définir la longueur d'une courbe de classe C^1 par un processus d'"approximations polygonales".

Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1, et soit $\sigma = [t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b]$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. On note

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{m-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

où le suprémum est pris sur toutes les subdivisions de $[a, b]$ et $d(p, q) = \|q - p\|$.

(a) Faire un dessin et expliquer brièvement la signification de cette formule.

(b) Montrer que pour tout courbe C^1 on a $L(\gamma) \leq \ell(\gamma)$, où $\ell(\gamma)$ est la longueur de γ telle que définie dans le cours.

(c) Prouver l'inégalité inverse $\ell(\gamma) \leq L(\gamma)$.
(Indication : Utiliser que $\dot{\gamma}$ est uniformément continue et montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une subdivision suffisamment fine de $[a, b]$ telle que $\ell(\gamma) \leq \sum_{i=1}^{m-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + 2\varepsilon(b - a)$).
