Le premier exercice étudie une classe de courbes sur les surfaces et dans le second, on calcule l'intégrale de la courbure gaussienne du tore de révolution. On finit avec un exercice de révision sur la courbure des courbes planes.

Exercice 14.1. Une courbe régulière $\gamma : I \to S$ tracée sur une surface régulière coorientée $S \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^2 s'appelle une *ligne asymptotique*[1] si elle est de classe C^2 et son vecteur de courbure est tangent à la surface pour tout $t \in I$.

Prouver que les affirmations suivantes sont équivalentes:

(a) La courbe γ est une ligne asymptotique de S.

(b) La courbure normale k_n de γ est identiquement nulle.

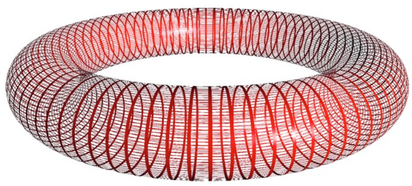
(c) $h(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) = 0$ pour tout $t \in I$, où h est la seconde forme fondamentale de S.

(d) En tout point de la courbe, le vecteur binormal de γ est égale, au signe près, au vecteur de coorientation de la surface.

(e) Le plan osculateur à γ coïncide avec le plan affine tangent en S en chaque point de γ.

(Pour les points (d) et (e) on suppose que la courbe est régulière au sens de Frenet).

Exercice 14.2. On note $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ le tore obtenu en faisant tourner le cercle de rayon 1 et de centre $(a, 0, 0)$ du plan Oxz autour de l'axe Oz (on suppose que $a > 1$).



a) Donner une paramétrisation du tore $\mathcal{T}$ et calculer le tenseur métrique associé.

b) Calculer l'aire de la surface $\mathcal{T}$.

c) Calculer la courbure de Gauss K de $\mathcal{T}$ (on exprimera K comme fonction des paramètres de la paramétrisation donnée en (a)).

d) Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_{\mathcal{T}} K dA$.

[1] La terminologie est justifiée par le fait que le vecteur vitesse d'une ligne de courbure est en direction d'une asymptote de l'indicatrice de Dupin, qui est l'ensemble des vecteurs $v \in T_pS$ tels que $|h(v, v)| = 1$ (mais ceci n'influence pas l'exercice).

Exercice de révision :

Exercice 14.3. (a) Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée de classe C^2 dans le plan orienté. On suppose que sa courbure orientée, que l'on note k, vérifie $0 \leq k(t) \leq C$ pour tout $t \in [a, b]$.

Démontrer que la longueur ℓ de γ vérifie $\ell \geq 2\pi/C$.

(b) Est-ce que cette borne peut-être atteinte, i.e. existe-t-il une courbe fermée γ de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $k(t) = 2\pi/\ell(\gamma)$ pour tout t ?