

Ruban de Möbius : $\psi : [0, 2\pi] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^3$

1

$$\psi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) + v \cos(\frac{u}{2}) \cos(u) \\ \sin(u) + v \cos(\frac{u}{2}) \sin(u) \\ v \sin(\frac{u}{2}) \end{pmatrix}$$

Voir ex 7.8

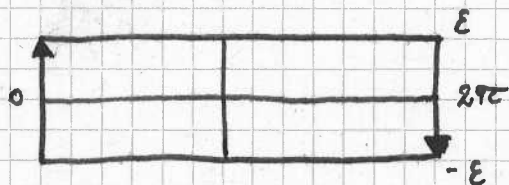
en fait, $\psi(u, v) = \gamma(u) + v \vec{b}'(u)$

où $\gamma(u)$ est un cercle et $\vec{b}'$ est un champ de vecteurs $\perp$ à $\dot{\gamma}$

qui fait un demi tour quand on fait le tour du cercle, i.e. $\vec{b}(0) = -\vec{b}(2\pi)$

de plus, comme $\vec{b}' \perp \dot{\gamma}$, $\vec{b}$ est dans le plan $\Pi((\cos(u), \sin(u), 0), (0, 0, 1))$.

comme il fait un demi tour, $\vec{b} = \cos(\frac{u}{2})(\cos(u), \sin(u), 0) + \sin(\frac{u}{2})(0, 0, 1)$,
ce qui explique la paramétrisation.



Le vecteur normal est donné par :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin(\frac{u}{2}) \cos(u) \left[1 + v \cos(\frac{u}{2}) \right] - \frac{v}{2} \sin(u) \\ \sin(\frac{u}{2}) \sin(u) \left[-1 - v \cos(\frac{u}{2}) \right] - \frac{v}{2} \cos(u) \\ -\cos(\frac{u}{2}) - v \cos^2(\frac{u}{2}) \end{pmatrix}$$

et on a bien $\vec{n}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}|_{(2\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ce qui montre que le ruban de Möbius n'est pas orientable.

Param de Pölsius:

$$\psi: [0, 2\pi] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto \begin{cases} \cos(u) + v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) \\ \sin(u) + v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \end{cases}$$

$$\left(v \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right)$$

$$b_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\sin(u) + v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) - v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \\ \cos(u) - \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) + v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) \\ \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 + \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) \\ 0 + \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \\ \sin\left(\frac{u}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$b_1 \times b_2 = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \left(\cos(u) - \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) + v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) \right) - \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \\ \sin\left(\frac{u}{2}\right) \left(-\sin(u) - \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) - v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \right) - \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) \\ \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \left(-\sin(u) - \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) - v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \right) - \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \left(\cos(u) - \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) + v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) \right) \end{pmatrix}$$

$$\underline{R_1} = \dot{\sin}\left(\frac{\mu}{2}\right) \left(\cos(\mu) - \frac{\nu}{2} \dot{\sin}\left(\frac{\mu}{2}\right) \sin(\mu) + \nu \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos(\mu) \right) - \frac{\nu}{2} \cos^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \dot{\sin}(\mu)$$

$$= \dot{\sin}\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos(\mu) - \frac{\nu}{2} \dot{\sin}(\mu) + \nu \dot{\sin}\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos(\mu) \\ = \dot{\sin}\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos(\mu) \left[1 + \nu \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \right] - \frac{\nu}{2} \dot{\sin}(\mu) = \begin{cases} 0 & e_n(0,0) \\ 0 & e_n(2\pi,0) \end{cases}$$

$$\underline{R_2} = \dot{\sin}\left(\frac{\mu}{2}\right) \left(-\dot{\sin}(\mu) - \frac{\nu}{2} \dot{\sin}\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos(\mu) - \nu \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \dot{\sin}(\mu) \right) - \frac{\nu}{2} \cos^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \dot{\sin}(\mu)$$

$$= -\dot{\sin}\left(\frac{\mu}{2}\right) \dot{\sin}(\mu) - \frac{\nu}{2} \cos(\mu) - \nu \dot{\sin}\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \dot{\sin}(\mu) \\ = \dot{\sin}\left(\frac{\mu}{2}\right) \dot{\sin}(\mu) \left[-1 - \nu \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \right] - \frac{\nu}{2} \cos(\mu) = \begin{cases} 0 & e_n(0,0) \\ 0 & e_n(2\pi,0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{n}_3 &= \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \sin(\mu) \left(-\dot{\sin}(\mu) - \frac{15}{2} \dot{\sin}\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos(\mu) - 15 \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \dot{\sin}(\mu) \right) \\
 &\quad - \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos(\mu) \left(\cos(\mu) - \frac{15}{2} \dot{\sin}\left(\frac{\mu}{2}\right) \dot{\sin}(\mu) + 15 \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos(\mu) \right) \\
 &= -\cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \dot{\sin}^2(\mu) - \frac{15}{2} \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \dot{\sin}\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos(\mu) \dot{\sin}(\mu) - 15 \cos^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \dot{\sin}^2(\mu) \\
 &\quad - \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos^2(\mu) + \frac{15}{2} \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \dot{\sin}\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos(\mu) \dot{\sin}(\mu) - 15 \cos^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \cos^2(\mu) \\
 &= -\cos\left(\frac{\mu}{2}\right) - 15 \cos^2\left(\frac{\mu}{2}\right) = \begin{cases} -1 & \text{en } (0,0) \\ 1 & \text{en } (2\pi,0) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Victoire