• **Produit scalaire** Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire (i.e. une forme bilinéaire symétrique définie positive) qu'on note $\langle\ ,\ \rangle$. Dans une base orthornormée il est donné par $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$. A partir de la norme le produit scalaire s'exprime

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2\right).$$

On a aussi

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle = \|\mathbf{a}\|^2$	$\lvert\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle\rvert \leq \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos(\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$	$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \dfrac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2\right)$	$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2\right)$

• **Produits vectoriel et mixte dans $\mathbb{R}^3$.**

1.) Dans une base orthonormée d'orientation positive on a

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3$$

2.) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle\,\mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle\,\mathbf{a}$

3.) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle\,\mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle\,\mathbf{c}$

4.) $\langle \mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{c}\times\mathbf{d}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle\langle \mathbf{b}, \mathbf{d}\rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d}\rangle\langle \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle$

5.) $\langle \mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{c}\times\mathbf{d}\rangle = \langle(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle$.

6.) Le *produit mixte* de trois vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\in\mathbb{V}^3$ est défini par $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \langle \mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\times\mathbf{c}\rangle$
il est trilinéaire et est donné par le déterminant 3×3 formé par la matrice dont les colonnes sont les coefficients des 3 vecteurs.

7.) on a $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]\mathbf{c} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{d}$.

• **Produits extérieur dans le plan.** Dans le plan orienté $\mathbb{R}^2$, le produit extérieur de deux vecteurs est

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \langle \mathbf{J}(\mathbf{a}), \mathbf{b}\rangle$$

où $\mathbf{J}$ est l'opérateur de rotation d'angle $\pi/2$ dans le sens positif.

• **Courbes.** Le vecteur vitesse d'une courbe γ de $\mathbb{R}^n$ se note $\dot\gamma$ La vitesse est $V = V_\gamma(u) = \|\dot\gamma(u)\|$ et l'abscisse curviligne depuis le point initial $\gamma(u_0)$ est

$$s(u) = \int_{u_0}^{u} V_\gamma(\tau)d\tau.$$

La formule de l'accélération est

$$\ddot\gamma(u) = \dot V\mathbf{T} + V^2\mathbf{K}$$

où $\mathbf{T} = \frac{1}{V}\dot\gamma$ et $\mathbf{K} = \frac{1}{V}\dot{\mathbf{T}}$ est le vecteur de courbure. La courbure de γ est la fonction scalaire $\kappa(u) = \|\mathbf{K}(u)\|$.

• **Repère de Frenet.** Si $\gamma(u)\in\mathbb{R}^3$ est C^3 et birégulière, le repère mobile de Frenet est le repère repère orthonormé direct d'origine $\gamma(u)$ et de base

$$\mathbf{T} = \tfrac{1}{V}\dot\gamma, \qquad \mathbf{N} = \frac{\dot{\mathbf{T}}}{\|\dot{\mathbf{T}}\|} = \frac{1}{\kappa}\mathbf{K}, \qquad \mathbf{B} = \frac{\dot\gamma\times\ddot\gamma}{\|\dot\gamma\times\ddot\gamma\|}.$$

La torsion est $\tau = \frac{1}{V}\langle \mathbf{B}, \dot{\mathbf{N}}\rangle$ et on a les équations de Serret-Frenet :

$$\tfrac{1}{V}\dot{\mathbf{T}} = \kappa\mathbf{N}, \qquad \tfrac{1}{V}\dot{\mathbf{N}} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, \qquad \tfrac{1}{V}\dot{\mathbf{B}} = -\tau\mathbf{N}$$

On a aussi

$$\kappa = \frac{\|\dot\gamma \times \ddot\gamma\|}{V^3}, \qquad \tau = \frac{[\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma]}{\|\dot\gamma \times \ddot\gamma\|^2} = \frac{[\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma]}{\kappa^2 V^6}$$

Le vecteur de Darboux est le champ de vecteurs le long de γ défini par

$$\mathbf{D} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$$

• **Surfaces paramétrée.** Si $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est une surface paramétrée, le repère mobile adapté est

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\overrightarrow{\partial\psi}}{\partial u_1}(u_1, u_2), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\overrightarrow{\partial\psi}}{\partial u_2}(u_1, u_2), \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|}$$

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ engendrent le plan tangent à la surface au point $p = \psi(u_1, u_2)$ et $\boldsymbol{\nu}$ est vecteur normal.
Si $f(x, y, z) = 0$ est une équation pour la surface alors on a aussi

$$\boldsymbol{\nu} = \pm \frac{\overrightarrow{\nabla f}}{\|\overrightarrow{\nabla f}\|}.$$

Le tenseur métrique $G = (g_{i,})$ est la matrice de Gram de $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, i.e. $g_{ij} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle$.
L'élément d'aire infinitésimale est

$$dA = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \cdot du_1 du_2 = \|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\| du_1 du_2$$

et l'élément de longueur infinitésimale est

$$ds = \sqrt{g_{11}\, du_1^2 + 2\, g_{12}\, du_1\, du_2 + g_{22}\, du_2^2}$$

• **Repère de Darboux, courbures normales et géodésiques.** Si γ est tracée sur la surface S, on note $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{T}$. Le repère de Darboux est $\{\boldsymbol{\nu}, \mathbf{T}_\gamma, \boldsymbol{\mu}\}$. La courbure normale, la courbure géodésique et la torsion géodésique de γ sont définis par

$$k_n(u) = \langle \mathbf{K}_\gamma(u), \boldsymbol{\nu}(u) \rangle, \qquad k_g(u) = \langle \mathbf{K}_\gamma(u), \boldsymbol{\mu}(u) \rangle \qquad \text{et} \qquad \tau_g(u) = \tfrac{1}{V_\gamma(u)} \langle \dot{\boldsymbol{\nu}}(u), \boldsymbol{\mu}(u) \rangle.$$

Les équations de Darboux sont :

$$\tfrac{1}{V}\dot{\mathbf{T}} = k_g \boldsymbol{\mu} + k_n \boldsymbol{\nu}, \qquad \tfrac{1}{V}\dot{\boldsymbol{\nu}} = -k_n \mathbf{T} + \tau_g \boldsymbol{\mu}, \qquad \tfrac{1}{V}\ \dot{\boldsymbol{\mu}} = -k_g \mathbf{T} - \tau_g \boldsymbol{\nu}.$$

• **Application de Weingarten et deuxième forme fondamentale.** L'application de Weingarten L_p en un point d'une surface S est l'endomorphisme de T_pS défini par $L_p = d\boldsymbol{\nu}_p$.
La deuxième forme fondamentale est la forme bilinéaire sur T_pS définie par $h_p(\xi, \eta) = -\langle L_p(\xi), \eta \rangle$. Les coefficients de h_p dans la base adaptée $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ se calculent par :

$$h_{ij} = h(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b}_{ij} \rangle,$$

où

$$\mathbf{b}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial u_i} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j}$$

Les coefficients de la matrice de l'application de Weingarten dans la même base sont définis par

$$L(\mathbf{b}_i) = \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial u_i} = \ell_{1i}\mathbf{b}_1 + \ell_{2i}\mathbf{b}_2.$$

Pour calculer cette matrice il est commode d'utiliser la relation $\mathbf{H} = -\mathbf{G}\mathbf{L}$, qui implique

$$\mathbf{L} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}.$$

Les courbures principales, de Gauss et moyenne de S en p sont les valeurs propres, le déterminant et la demi trace de $-L_p$.
Le point p est ombilique si les deux courbures principales coïncident en ce point.