

A. Exercices standards.

Exercice 9.1. (Courbe comme intersection de deux surfaces). Notons $\mathcal{C} \subset \Omega$ l'ensemble des points de Ω tels que

$$f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0,$$

où Ω est un domaine de \mathbb{R}^3 et $f, g \in C^k(\Omega)$ avec $k \geq 1$. Supposons que pour un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$$

est de rang 2.

- (a) Expliquer pourquoi on peut paramétriser l'ensemble \mathcal{C} dans un voisinage de (x_0, y_0, z_0) comme courbe régulière $\gamma : I \rightarrow \Omega$ de classe C^k .
- (b) Que peut-on dire du vecteur tangent $\dot{\gamma}(t)$?

Solution 9.1. (a) Nous donnons deux preuves de l'existence d'une paramétrisation de \mathcal{C} comme une courbe de classe C^k .

La première preuve utilise le théorème 3.15 : notons $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $F = (f, g)$. Par hypothèse, F est une application de classe C^k et de rang maximal = 2 en (x_0, y_0, z_0) . Par semi-continuité inférieure du rang, on sait que F est de rang constant = 2 dans un voisinage de (x_0, y_0, z_0) .

On applique alors le théorème 3.15 pour en conclure que \mathcal{C} est une sous-variété différentiable dans un voisinage du point (x_0, y_0, z_0) . La codimension de cette sous-variété est 2 et donc la dimension de \mathcal{C} est $1 = 3 - 2$. Par conséquent il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de (x_0, y_0, z_0) et une paramétrisation régulière bijective $\gamma : I \rightarrow U \cap \mathcal{C}$ de classe C^k .

Pour la seconde preuve, on raisonne directement à partir du théorème du rang constant. Ce théorème nous dit que dans notre situation, il existe

- (i) Un voisinage $U \subset \Omega$ de (x_0, y_0, z_0) ainsi qu'une application $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\Phi(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ et Φ est un difféomorphisme sur son image.
- (ii) Un voisinage $V \subset \mathbb{R}^2$ de $F(x_0, y_0, z_0)$ ainsi qu'une application $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\Psi(F(x_0, y_0, z_0)) = (0, 0)$ et Ψ est un difféomorphisme sur son image.
- (iii) Et une application linéaire $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de rang 2 telle que $L \circ \Phi = \Psi \circ F$.

Par conséquent un point (x, y, z) appartient à l'intersection $\mathcal{C} \cap U$ si et seulement si $L(\Phi(x, y, z)) = 0$, c'est-à-dire $\Phi(x, y, z) \in \ker(L)$.

Le noyau de L est de dimension 1, engendré par un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^3$. La courbe

$$\gamma(t) = \Phi^{-1}(tv),$$

est alors clairement une paramétrisation locale de \mathcal{C} au voisinage de (x_0, y_0, z_0) .

(b) Comme la courbe γ est tracée sur la surface d'équation $f = 0$, son vecteur vitesse $\dot{\gamma}$ est orthogonal au gradient $\vec{\nabla} f$. Ce vecteur est aussi orthogonal au gradient $\vec{\nabla} g$. On a donc

$$\langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = \langle \vec{\nabla} g(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0.$$

(ce vecteur est en particulier tangents aux deux surfaces). On observe pour finir que la condition précédente signifie aussi que $\dot{\gamma}(t)$ est colinéaire au produit vectoriel $\vec{\nabla} f(\gamma(t)) \times \vec{\nabla} g(\gamma(t))$.

Exercice 9.2. Rappelons que par définition une application $f : M \rightarrow N$ entre deux sous-variétés différentiables est un *difféomorphisme* si elle est bijective et f ainsi que f^{-1} sont différentiables.

- (a) Prouver que pour tout $p \in M$, la différentielle $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- (b) En déduire qu'il n'existe aucun difféomorphisme entre deux variétés non vides qui n'ont pas la même dimension.
- (c) Montrer par un exemple qu'une application différentiable bijective $f : M \rightarrow N$ entre deux sous-variétés différentiables n'est pas toujours un difféomorphisme (on peut supposer $\dim(M) = 1$).

Solution 9.2. (a) Notons pour simplifier $q = f(p) \in N$ et $g = f^{-1} : N \rightarrow M$ le difféomorphisme inverse de f . Alors $g \circ f : M \rightarrow M$ est l'application identité et en particulier la différentielle $d(g \circ f)_p : T_p M \rightarrow T_p M$ est aussi l'application identité. La règle de dérivation en chaîne implique alors que

$$dg_q \circ df_p = d(g \circ f)_p : T_p M \rightarrow T_p M \quad \text{est l'application identité.}$$

Le même raisonnement appliqué à l'application $f \circ g : N \rightarrow N$ entraîne que $df_p \circ dg_q : T_q N \rightarrow T_q N$ est l'application identité. Par conséquent l'application linéaire $df_p : T_p M \rightarrow T_q N$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels (d'inverse dg_q).

(b) Supposons qu'il existe un difféomorphisme $f : M \rightarrow N$, alors par le point (a), pour tout $p \in M$ on a que $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, en particulier ces espaces vectoriels ont la même dimension et donc

$$\dim(M) = \dim(T_p M) = \dim(T_{f(p)} N) = \dim(N).$$

(c) Par le point (a), il suffit de se donner une application différentiable bijective $f : M \rightarrow N$ pour laquelle il existe au moins un point où la différentielle $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ n'est pas un isomorphisme. Un exemple simple est la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^3$.

Remarque sur le point (b). En fait il n'existe pas non plus d'homéomorphisme entre des variétés de dimension différentes. Cela semble intuitivement évident, mais la preuve demande beaucoup plus de travail car on ne peut pas se ramener (via la différentielle) à la notion de dimension de l'algèbre linéaire. Ce résultat topologique est connu sous le nom de *théorème de l'invariance de la dimension* et a été démontré par le mathématicien néerlandais Luitzens Brouwer vers 1910. Rappelons toutefois qu'on sait depuis les travaux de Cantor que pour toute paire d'entiers $m, n \geq 1$, il existe une bijection entre \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n (plus généralement, il existe toujours une bijection entre deux variétés non vides de dimension > 1 .)

Exercice 9.3. (a) On a vu à précédemment que $O(n)$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. Décrire l'espace tangent $T_I O(n)$ de cette variété au point I (= la matrice identité).

(b) Prouver que $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

(c) Décrire l'espace tangent $T_I SL_n(\mathbb{R})$.

Solution 9.3. (a) On rappelle qu'au voisinage de $O(n)$, l'application

$$\Phi : A \mapsto AA^\top$$

est de rang constant. Sa différentielle en $A = I =$ l'identité est donné par

$$d\Phi_I(H) = H + H^\top.$$

Le groupe $O(n)$ est défini par l'équation $\Phi(A) = I$, donc son espace tangent à l'identité est donné par

$$T_I O(n) = \text{Ker } d_I \Phi = \{H \in M_n(\mathbb{R}) \mid H + H^\top = 0\},$$

c'est l'ensemble des matrices anti-symétriques (on le note souvent $\mathfrak{o}(n)$ dans le contexte des groupes de Lie).

(b) On rappelle que $SL_n(\mathbb{R})$ est le groupe des $n \times n$ matrices réelles de déterminant 1 :

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$

On a vu à la série 7 que la différentielle de l'application déterminant est donnée par

$$d(\det)_A(H) = \text{Trace} \left(\text{Cof}(A)^\top H \right).$$

Il est clair que cette application est une forme linéaire non-nulle si $\det(A) = 1$ car dans ce cas on a $d(\det)_A(H) = \text{Trace} (A^{-1}H)$, et 1 est donc une valeur régulière de la fonction déterminant. Ainsi l'équation $\det(A) = 1$ définit une sous variété de codimension 1 = $\dim(\mathbb{R})$, et donc de dimension $n^2 - 1$.

(c) Son espace tangent à l'identité est le noyau de $d_I(\det) = \text{Trace}$. Donc l'espace tangent en I à $SL_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de trace nulle. (on le note aussi \mathfrak{sl}_n dans le cadre de la théorie des groupes classiques ou des groupes de Lie).

Exercice 9.4. Une surface est dite *réglée* si c'est une réunion de droites. De façon plus précise, soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe C^1 et $\mathbf{b} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 le long de γ . La surface réglée associée est définie par la paramétrisation:

$$\psi(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{b}(u).$$

(a) Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface réglée ainsi définie soit en effet une surface régulière localement (c'est-à-dire pour que l'application ψ soit une immersion).

(b) Soit \mathcal{C} une courbe de \mathbb{R}^3 . On appelle *cône de sommet* $q \in \mathbb{R}^3$ *et de base* \mathcal{C} la réunion des droites passant par q et un point de \mathcal{C} . Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un cône soit une surface régulière au voisinage de sa base. Puis expliciter une paramétrisation de ce cône.

(c) Expliquer ce qu'est un ruban de Möbius et donner une paramétrisation de cette surface comme surface réglée dans \mathbb{R}^3 .

Solution 9.4. Une brève présentation des surfaces réglées se trouve ici : https://fr.wikipedia.org/wiki/Surface_r%C3%A9gl%C3%A9e

(a) L'application $\psi(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{b}(u)$ est clairement de classe C^1 car on suppose que la courbe γ et le champ \mathbf{b} sont de classe C^1 . Cette application est une immersion si et seulement si

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} = \dot{\gamma}(u) \times \mathbf{b}(u) + v \dot{\mathbf{b}}(u) \times \mathbf{b}(u) \neq 0.$$

Noter qu'en particulier on doit avoir $\dot{\gamma}(u) \times \mathbf{b}(u) \neq 0$, c'est-à-dire $\dot{\gamma}(u)$ et $\mathbf{b}(u)$ sont linéairement indépendants (poser $v = 0$ pour le voir). Pour v assez petit cette condition est suffisante.

(b) Le cône de cet exercice est un cas particulier de surface réglée où le champ de vecteur est le champ $\mathbf{b}(u) = q - \gamma(u)$. La condition de régularité dit dans ce cas que le vecteur tangent à la courbe n'est jamais dirigé vers q (i.e. $\dot{\gamma}(u)$ n'est pas un multiple de $q - \gamma(u)$). Une paramétrisation est

$$\psi(u, v) = \gamma(u) + v(q - \gamma(u)) = vq + (1 - v)\gamma(u).$$

(c) Un ruban de Möbius s'obtient en prenant un rectangle (disons en papier) et en recollant deux des côtés opposés après une rotation d'un demi-tour. Topologiquement c'est donc le quotient de

$$Q = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq \ell, -\varepsilon < v < \varepsilon\}$$

par la relation d'équivalence qui identifie les points $(0, v)$ et $(\ell, -v)$.

Nous vous conseillons de construire un tel ruban (suggestion prendre ℓ/ε assez grand, disons ≥ 6). Nous vous suggérons aussi de *dessiner* un ruban de Möbius, cela vous donnera une intuition pour la suite.

L'exercice demande une paramétrisation concrète du ruban de Möbius comme surface dans \mathbb{R}^3 . L'observation de votre ruban de Möbius en papier vous convaincra qu'il s'agit d'une réalisation comme surface réglée (les droites horizontales du rectangle Q sont envoyées sur des courbes fermées de \mathbb{R}^3 , mais les droites verticales sont envoyées sur des droites; c'est nécessaire en raison des propriétés mécaniques du papier). La courbe centrale ($v = 0$) du rectangle Q est envoyée sur une courbe fermée et on peut supposer que c'est le cercle unité du plan $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. On va donc poser $\ell = 2\pi$ et construire le ruban de Möbius comme surface réglée de base

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(u) = (\cos(u), \sin(u), 0).$$

Le réglage (i.e. la famille de droites) est alors déterminé par un champ de vecteur $\mathbf{b} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$. On peut le choisir unitaire et la construction physique du ruban de Möbius nous montre que ce champ de vecteur est orthogonal à la direction de la courbe :

$$\mathbf{b}(u) \perp \dot{\gamma}(u) = (-\sin(u), \cos(u), 0).$$

On a donc

$$\mathbf{b}(u) = \cos(\lambda(u))(\cos(u), \sin(u), 0) + \sin(\lambda(u))(0, 0, 1),$$

où $\lambda : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à déterminer (car $\{(\cos(u), \sin(u), 0), (0, 0, 1)\}$ est une base orthonormée de $\dot{\gamma}(u)^\perp$). Or la construction du ruban de Möbius exige que lorsqu'un tour a été effectué le long de la base γ , le vecteur $\mathbf{b}(u)$ effectue un demi-tour. On a donc les contraintes

$$\mathbf{b}(2\pi) = -\mathbf{b}(0) \quad \text{i.e.} \quad \cos(\lambda(2\pi)) = -\cos(\lambda(0)), \quad \sin(\lambda(2\pi)) = -\sin(\lambda(0)).$$

La fonction la plus simple ayant cette propriété est $\lambda(u) = u/2$ et on peut donc choisir le champ de vecteur

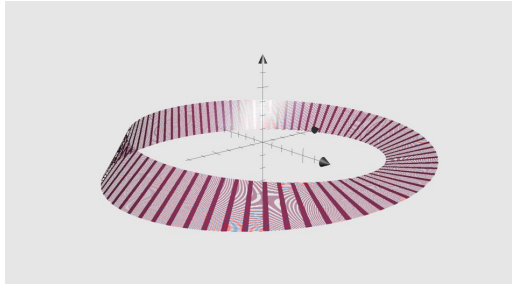
$$\mathbf{b}(u) = \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cdot (\cos(u), \sin(u), 0) + \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cdot (0, 0, 1).$$

Finalement le ruban de Möbius peut être paramétrisé par

$$\psi : Q = [0, 2\pi] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{b}(u),$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x(u, v) &= \cos(u) + v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) \\ y(u, v) &= \sin(u) + v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \\ z(u, v) &= v \sin\left(\frac{u}{2}\right) \end{cases}$$



Exercice 9.5. Montrer que l'hyperboloïde \mathcal{H} à une nappe $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ est une surface doublement réglée (i.e. réglée de deux manières différentes), puis donner une paramétrisation régulière de cette surface basée sur l'un de ces réglages.

Indication : Ecrire l'équation sous la forme $x^2 - 1 = z^2 - y^2$ et factoriser. En déduire algébriquement l'équation d'une droite contenue dans \mathcal{H} , puis la paramétrer et la faire tourner autour de l'axe Oz .

Solution 9.5. En factorisant $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, on obtient l'équation

$$(x+1)(x-1) = -(y-z)(y+z)$$

qui est vérifiée, par exemple, pour la droite $x = 1, y = z = v$. La rotation d'angle u de cette droite autour de l'axe Oz donne

$$\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u - v \sin u \\ \sin u + v \cos u \\ v \end{pmatrix}$$

et on vérifie que le résultat appartient encore à \mathcal{H} . On en déduit la paramétrisation suivante

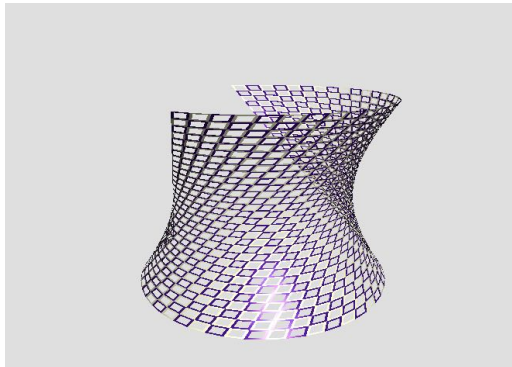
$$\psi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{b}(u) = (\cos(u), \sin(u), 0) + v(-\sin(u), \cos(u), 1) = (\cos(u) - v \sin(u), \sin(u) + v \cos(u), v)$$

(on vérifie aisément que cette paramétrisation recouvre tous les points de \mathcal{H}).

Si on avait choisi la solution $x = 1, y = -z = v$, on aurait obtenu la paramétrisation

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{b}(u) = (\cos(u) - v \sin(u), \sin(u) + v \cos(u), -v).$$

Remarquons que l'hyperboloïde est évidemment aussi une surface de révolution. On peut donc le voir de deux façons comme une famille de droites et aussi comme une famille de cercles.

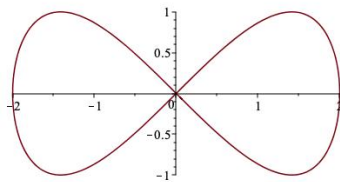


B. Exercice supplémentaire.

Exercice 9.6. Dans cet exercice nous construisons un exemple d'immersion injective qui n'est pas un plongement.

La *lemniscate de Geronno* est la courbe plane définie par l'équation $4x^2 - 4y^2 - x^4 = 0$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 4y^2 - x^4 = 0\}.$$



- (a) Montrer que \mathcal{C} n'est pas une sous-variété différentiable de \mathbb{R}^2 .
- (b) La restriction de cette courbe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est-elle une sous-variété différentiable ?
- (c) Vérifier que $\gamma : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (2 \cos(t), \sin(2t))$ est une paramétrisation régulière de \mathcal{C} .

De façon précise, démontrer que

- (i) γ est une immersion de l'intervalle ouvert $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ dans le plan.
- (ii) γ est injective.
- (iii) γ définit une bijection entre l'intervalle ouvert $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ et la courbe \mathcal{C} .
- (iv) Expliquer ce qu'il se passe sur γ lorsque $t \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ et $t \rightarrow +\frac{3\pi}{2}$.
- (v) Prouver que γ n'est pas un plongement de l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ dans le plan. (c'est-à-dire que ça n'est pas un homéomorphisme sur son image).

Solution 9.6. A titre préliminaire, étudions la fonction définie sur le plan par $f(x, y) = 4x^2 - 4y^2 - x^4$. Le gradient de f est $\nabla f(x, y) = (8x - 4x^3, -8y)$, il n'y a donc qu'un seul point critique qui est $(0, 0)$ et $0 = f(0, 0)$ est la seule valeur critique.

- (a) La lemniscate est la courbe $\mathcal{C} = f^{-1}(0)$, comme 0 est une valeur critique on ne peut pas appliquer le théorème de submersion et on peut soupçonner que \mathcal{C} n'est pas une variété, ce qui est d'ailleurs visible sur la figure. Nous donnons deux preuves rigoureuses que \mathcal{C} n'est pas une variété. Le premier argument est purement topologique et le second fait intervenir la notion d'espace tangent.

Voyons le premier argument, fixons $0 < \varepsilon < 2$ arbitrairement petit et notons

$$\mathcal{C}_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathcal{C} \mid |x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon\}.$$

On observe que \mathcal{C}_ε est un voisinage arbitrairement petit de $(0, 0)$ et que

$$\mathcal{C}_\varepsilon \setminus \{(0, 0)\} = \mathcal{C}_\varepsilon^{++} \cup \mathcal{C}_\varepsilon^{+-} \cup \mathcal{C}_\varepsilon^{-+} \cup \mathcal{C}_\varepsilon^{--}$$

est la réunion de quatre arcs disjoints, tous homéomorphes à un intervalle ouvert. Ici on a défini

$$\mathcal{C}_\varepsilon^{++} = \{(x, y) \in \mathcal{C}_\varepsilon \mid x > 0, y > 0\} = \{(x, y) \mid y = x \cdot \sqrt{1 - \frac{x^4}{4}}, 0 < x < \varepsilon\}$$

l'intersection de \mathcal{C}_ε avec le quadrant ouvert principal (et de même pour les autres quadrants).

Le complémentaire d'un point dans un voisinage connexe assez petit d'une variété possède une ou deux composantes connexes. Ceci prouve que \mathcal{C} n'est pas une variété.

Deuxième argument. On raisonne par l'absurde. Si \mathcal{C} était une sous-variété de \mathbb{R}^2 , elle serait une sous-variété de dimension 1 (voir question (b)). Nous pouvons maintenant considérer les deux courbes suivantes contenues dans \mathcal{C} et passant par $(0, 0)$:

$$\alpha_1(t) = (t, t \cdot \sqrt{1 - \frac{t^4}{4}}) \quad \text{et} \quad \alpha_2(t) = (t, -t \cdot \sqrt{1 - \frac{t^4}{4}}).$$

Il est facile de vérifier que $\alpha_1(t) \in \mathcal{C}$ pour $-2 < t < 2$ et de même pour $\alpha_2(t)$. Or nous avons

$$\dot{\alpha}_1(0) = (1, 1) \quad \text{et} \quad \dot{\alpha}_2(0) = (1, -1).$$

Cela signifie que l'espace tangent $T_{(0,0)}\mathcal{C}$ contient deux vecteurs linéairement indépendants, ce qui est impossible puisque pour une variété différentiable M on a toujours $\dim(T_p M) = \dim(M)$ ($= 1$ dans le cas de \mathcal{C}). Nous concluons que \mathcal{C} n'est pas une sous-variété différentiable du plan.

- (b) La fonction $f(x, y) = 4x^2 - 4y^2 - x^4$ définit une submersion de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vers \mathbb{R} (car $(0, 0)$ est le seul point critique de f). Donc $f^{-1}(\mathcal{C}) \setminus \{(0, 0)\}$ est une sous-variété (elle est de codimension 1 et donc de dimension $= 2 - 1 = 1$).

- (c) (i) Vérifions que γ est une immersion. Sa dérivée est

$$\dot{\gamma}(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(2t)).$$

Cette quantité s'annule si on a simultanément $t \in \pi\mathbb{Z}$ et $t \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, ce qui est impossible. Donc γ est une courbe régulière, c'est une immersion de l'intervalle $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ dans le plan.

- (ii) Pour montrer que γ est injective, on suppose que $\gamma(t) = \gamma(u)$ avec $t, u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. On a alors $\cos(t) = \cos(u)$ et $\sin(2t) = \sin(2u)$. Ceci implique que $\sin(t) = \sin(u)$ car $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ et de même pour $\sin(2u)$. Nous avons donc $u = t \bmod(2\pi)$ et comme t et u sont contenus dans l'intervalle $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ (qui est de longueur 2π) on doit avoir $u = t$. Or nous avons les équivalences

$$\begin{cases} \cos(t) = \cos(u) \\ \sin(2t) = \sin(2u) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - u \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } t + u \in 2\pi\mathbb{Z} \\ t - u \in \pi\mathbb{Z} \text{ ou } t + u \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Sur l'intervalle $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, on voit que les conditions à la fin de l'équivalence ne sont réalisées que si $t = u$, d'où l'injectivité.

- (iii) Pour montrer que $\gamma : (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow \mathcal{C}$ est bijective, il suffit maintenant de montrer que cette application est surjective, i.e. que $\gamma((-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})) = \mathcal{C}$.

Pour vérifier que $\gamma((-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})) \subset \mathcal{C}$, il suffit de vérifier que $f(\gamma(t)) = 0$ pour tout t . C'est un calcul direct :

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= 4(2 \cos(t))^2 - 4(\sin(2t))^2 - (2 \cos(t))^4 \\ &= 16(\cos^2(t) - \sin^2(t) \cos^2(t) - \cos^2(t)) \\ &= 16 \cos^2(t)(1 - \sin^2(t) - \cos^2(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour l'autre inclusion, on commence par dire que si $(x, y) \in \mathcal{C}$, alors $-2 \leq x \leq 2$. On peut donc écrire

$$x = 2 \cos(t), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

On a alors

$$y^2 = \frac{1}{4}(16 \cos^2(t) - 16 \cos^4(t)) = \sin(2t)^2.$$

Le tracé des courbes de $t \mapsto 2 \cos(t)$ et $t \mapsto \sin(2t)$ montre que l'on peut choisir t de façon à avoir $x = 2 \cos(t)$ et y du même signe que $\sin(2t)$. Finalement, ce choix de $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ donne

$$(x, y) = (2 \cos(t), \sin(2t)) = \gamma(t).$$

(iv) On vérifie facilement que

$$\lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \gamma(t) = (0, 0).$$

Les extrémités de la courbe γ se rejoignent en $(0, 0)$, qui est aussi un point de la courbe. Noter que si on considère le prolongement par continuité $\bar{\gamma} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la courbe γ jusqu'au bord de l'intervalle de définition, alors $(0, 0)$ est l'unique point de $\bar{\gamma}$ qui n'est pas un point simple, c'est un point triple.

(v) Notons $t_k = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{k}$. Alors la suite $\{t_k\} \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ne converge pas. Mais on vient de voir que la suite $\{\gamma(t_k)\} \subset \mathcal{C}$ converge. On en conclut que la bijection inverse $\gamma^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ n'est pas continue (l'image d'une suite convergente par une application continue est toujours une suite convergente).

On peut de façon plus générale prouver qu'il n'existe aucun homéomorphisme entre \mathcal{C} et un intervalle ouvert (non vide) I . En effet toute suite de points de \mathcal{C} contient une sous-suite convergente par le théorème de Bolzano-Weierstrass et le fait que \mathcal{C} est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^2 (on dit que \mathcal{C} est *compact*). Par contre un intervalle ouvert (non vide) I contient des suites sans sous-suites convergentes. Ces deux ensembles ne peuvent pas être homéomorphes. Autre argument topologique, l'ensemble \mathcal{C} privé d'un point est connexe et l'intervalle I privé d'un point possède deux composantes connexes.