A. Exercices standards.

Exercice 8.1. On considère les fonctions suivantes : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = x^2y + 2\,x^2 - 2\,xy - 4\,x + y \quad \textbf{et} \quad g(x,y,z) = 2xy - 3yz.$$

(a) Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{R}$ la courbe de niveau $f^{-1}(c)$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

(b) Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{R}$ la surface de niveau $g^{-1}(c)$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

Solution 8.1. On utilise le résultat suivant: si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^k et si $df_p \neq 0$ en tout point p tel que $f(p) = c$, alors $f^{-1}(c)$ est une sous-variété de classe C^1 (on peut remplacer la différentielle par le gradient). Donc les valeurs de c pour lesquelles $f^{-1}(c)$ n'est pas une sous variété sont celles pour lesquelles il existe au moins une solution au système d'équations :

$$f(x) = c, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0.$$

(a) On calcule le gradient de f:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + 4x - 2y - 4 \\ x^2 - 2x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-1)(y+2) \\ (x-1)^2 \end{pmatrix}$$

Ce gradient est nul si et seulement si $x = 1$ et dans ce cas on calcule que $f(x,y) = f(1,y) = -2$. Par conséquent $f^{-1}(c)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ si $c \neq -2$.

En revanche, $f^{-1}(-2)$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, en effet on a

$$\begin{aligned} (x,y) \in f^{-1}(-2) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x,y) = x^2y + 2\,x^2 - 2\,xy - 4\,x + y = -2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad y = 2. \end{aligned}$$

Cet ensemble est la réunion de deux droites orthogonale et n'est donc pas une sous-variété (aucun voisinage du point $(1,2)$ n'est homéomorphe à un intervalle).

(b) On calcule le gradient de g:

$$\vec{\nabla} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x - 3z \\ -3y \end{pmatrix}$$

Ce gradient s'annule exactement sur l'ensemble des multiples de $(3,0,2)$, i.e. sur la droite $D = \mathbb{R} \cdot (3,0,2)$, et on remarque que sur cette droite on a aussi $g(x,y,z) = 0$. Par conséquent si $c \neq 0$ alors $g^{-1}(0)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ (car alors $\vec{\nabla} g \neq 0$).
Par contre, $g^{-1}(0)$ n'est pas une sous-variété car

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in g^{-1}(0) \quad &\Leftrightarrow \quad g(x,y,z) = y(2x - 3z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 3z = 0. \end{aligned}$$

Cet ensemble est la réunion de deux plans transverses et n'est donc pas une sous-variété Sur cette droite g est identiquement nulle. En particulier, $g^{-1}(0)$ n'est pas une sous-variété.

Remarque. Dans ces raisonnements on aurait pu remplacer le gradient par la différentielle.

Exercice 8.2. (a) Soit $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ un point régulier de la surface S surface définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$. Prouver que le plan vectoriel tangent T_pS est le plan orthogonal au gradient $\overrightarrow{\nabla} f(p)$.
(b) Le *plan affine tangent* à une surface S en un point régulier p est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ tels que le vecteur $\overrightarrow{pq} \in T_pS$. Montrer que le plan affine tangent est donné par

$$A_pS = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \langle q - p, \overrightarrow{\nabla} f(p)\rangle = 0\}.$$

(c) En appliquant le résultat précédent, obtenir la formule donnant l'approximation du premier ordre d'une fonction différentiable de deux variables $z = \varphi(x, y)$ au voininage d'un point (x_0, y_0) (série de Taylor à l'ordre 1).

Solution 8.2. (a) Rappelons que T_pS est l'ensemble des vecteurs tangents au point p à toutes les courbes tracées sur la surface, i.e. $\mathbf{v} \in T_pS$ si et seulement si il existe une courbe $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$. Si on note $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, alors on a

$$f(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

et donc, si $\mathbf{v} = \dot{\gamma}(0) = (v_1, v_2, v_3)$, alors

$$\langle \overrightarrow{\nabla} f(p), \mathbf{v}\rangle = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(p) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(p) + v_3 \frac{\partial f}{\partial z}(p) = 0.$$

Cela démontre que $T_pS \subset (\overrightarrow{\nabla} f(p))^{\perp} = \ker(df(p))$. Il s'agit en fait d'une égalité car d'une part on sait que T_pS est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (par le théorème des fonctions implicites), et d'autre part que $\ker(df(p))$ est aussi un sous-espace vectoriel de dimension 2 puisqu'on a supposé que p est un point régulier.

(b) Évident à partir des définitions.

(c) Le graphe de φ admet l'équation $f(x, y, z) = z - \varphi(x, y)$. On a donc $\overrightarrow{\nabla} f(p) = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, 1\right)$ et l'équation du plan affine tangent en un point $p = (x_0, y_0, z_0)$ est donc

$$-(x - x_0)\frac{\partial \varphi}{\partial x} - (y - y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (z - z_0) = 0,$$

qu'on peut écrire comme approximation d'ordre 1 de la fonction φ au voisinage de (x_0, y_0)

$$z = \varphi(x_0, y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

car $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$.

Exercice 8.3. Montrer que l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ est une surface régulière (i.e. une sous-variété de dimension 2) et calculer son plan affine tangent en un point $p = (x_0, y_0, z_0)$.

Solution 8.3. L'équation de l'ellipsoïde est

$$S : f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

On a $\nabla f(x,y,z) = (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2})$, il n'y a donc qu'un seul point critique en $(0,0,0)$, ce point n'est pas sur l'ellipsoïde qui est donc une surface régulière.
Le plan affine tangent au point p est

$$A_pS = \{q \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle \nabla f(p), q-p \rangle = 0\},$$

En posant $p = (x_0, y_0, z_0)$ et $q = (x, y, z)$, on obtient

$$\langle \nabla f(p), q-p \rangle = \langle (\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}), (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \rangle = \frac{2x_0\,(x-x_0)}{a^2} + \frac{2y_0\,(y-y_0)}{b^2} + \frac{2z_0\,(z-z_0)}{c^2}$$

On peut simplifier par 2, et on obtient l'équation

$$A_pS := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_0}{a^2}\,(x-x_0) + \frac{y_0}{b^2}\,(y-y_0) + \frac{z_0}{c^2}\,(z-z_0) = 0\}.$$

Exercice 8.4. On dit que deux sous-variétés différentiables M_1 et M_2 de $\mathbb{R}^n$ *s'intersectent transversalement* en un point p si $p \in M_1 \cap M_2$ et en ce point les espaces tangents vérifient $T_pM_1 + T_pM_2 = \mathbb{R}^n$.

(a) Donner un exemple d'une surface et d'une courbes régulières $\mathbb{R}^3$ qui s'intersectent en un point unique, mais de façon non transverse.

(b) Montrer que si S est une surface et C une courbe de $\mathbb{R}^3$ (toutes deux régulières), qui s'intersectent transversalement en $0 \in \mathbb{R}^3$, alors on peut construire un système de coordonnées locales (u, v, t) au voisinage de 0 telles que (u, v) sont des paramètres locaux de la surface S et t un paramètre local de la courbe C.

(c) Dans la même situation que en (b), prouver que 0 est un point isolé de l'intersection $S \cap C$ (i.e. il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^3$ tel que $V \cap S \cap C = \{0\}$).

Remarque : Dire qu'une courbe ou une surface est *régulière* signifie qu'elle est une sous-variété de classe C^k, avec $k \geq 1$.

Solution 8.4. (a) On peut prendre par exemple une sphère et une droite tangent à cette sphère. Disons $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ et $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ et } y = 1\}$.

(b) La surface S et la courbe C sont supposées régulières (ce sont des sous-variétés). Elles passent par le point $p = 0$ et ont peut donc localement paramétriser ces variétés par des applications de classe C^k (où k est la classe de régularité des sous-variétés):

$$\gamma : I \to C \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \psi : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3,$$

où d'une part $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle contenant 0 et on a $\gamma(0) = 0$ et $\dot\gamma(0) \neq 0$, et d'autre part $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert contenant $(0,0)$ et on a $\psi(0,0) = 0$ et $d\psi_{0,0}$ injectif (de façon équivalente les vecteurs dérivées partielles $\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u_1}$ et $\mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial u_2}$ en $(0,0)$ sont linéairement indépendants).
Considérons maintenant l'application

$$\Phi : \Omega \times I \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(u_1, u_2, t) = \psi(u_1, u_2) + \gamma(t).$$

On observe que $\Omega \times I$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ qui contient l'origine et que sa différentielle en $(0,0,0)$ est non nulle car les vecteurs

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(0,0,0) = \mathbf{b}_1(0,0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}(0,0,0) = \mathbf{b}_2(0,0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}(0,0,0) = \dot\gamma(0)$$

sont linéairement indépendants par l'hypothèse de transversalité. Le théorème d'inversion locale, nous dit alors qu'il existe un voisinage ouvert $U \subset \Omega \times I$ de $(0,0,0)$ tel que $\Phi : U \to \Phi(U) \subset \mathbb{R}^3$ est un difféomorphisme. Quitte à restreindre les domaine de paramétrisation Ω et I, on peut supposer que $U = \Omega \times I$. On a construit le système de coordonnées locales (u_1, u_2, t) demandé sur l'ouvert $V = \Phi(U) = \Phi(\Omega \times I)$.

(c) Avec les notations précédentes, on a clairement

$$S \cap V = \Phi\left(\{(u_1, u_2, t) \in U \mid t = 0\}\right) \quad \text{et} \quad C \cap V = \Phi\left(\{(u_1, u_2, t) \in U \mid u_1 = u_2 = 0\}\right).$$

Donc

$$S \cap C \cap V = \Phi\left(\{(u_1, u_2, t) \in U \mid t = u_1 = u_2 = 0\}\right) = \{(0,0,0)\}.$$

Exercice 8.5. La *fenêtre de Viviani* est la courbe d'intersection d'une sphère avec un cylindre circulaire droit qui passe par le centre de la sphère et dont le diamètre est le rayon de la sphère. Si le rayon de la sphère est 1, on peut donc admettre (quitte à appliquer une isométrie) que la fenêtre de Viviani est définie par les équations:

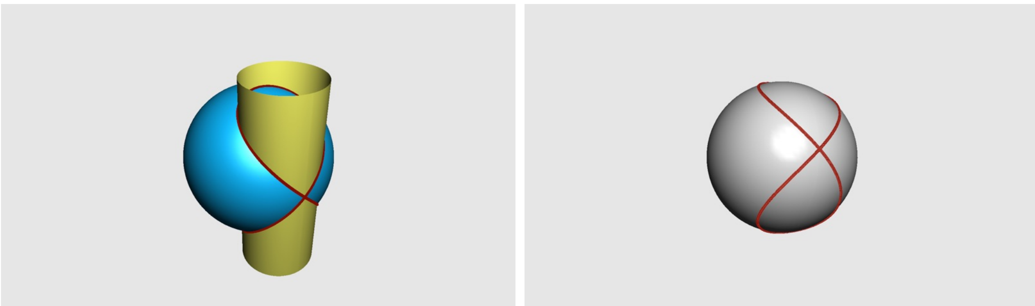
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \textbf{et} \qquad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

On notera cet ensemble V.

(a) Montrer par un argument géométrique qu'il existe un point $q \in V$ tel que le complémentaire $V \setminus \{q\}$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^3$. Quel sont les coordonnées de q (on admettra un argument heuristique) ?

(b) Prouver rigoureusement à partir des équations de V que $V \setminus \{q\} \subset \mathbb{R}^3$ est une sous-variété différentiable.

(c) Trouver une paramétrisation régulière de cette courbe.



Solution 8.5. (a) En tout point du cylindre, le plan tangent est un plan vertical. Pour la sphère, les seuls plans tangents verticaux sont les plans tangents aux points de l'équateur $\{z = 0\}$. Il y un seul point de la fenêtre de Viviani qui est sur l'équateur, c'est le point $q = (1,0,0)$. On conclut que les deux surfaces s'intersectent transversalement en tout point de $V \setminus \{q\}$, et donc $V \setminus \{q\}$ est une sous-variété différentiable de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.

(b) Notons $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ et $g(x,y,z) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4}$, alors $p \in V$ s.si $f(p) = g(p) = 0$. Calculons les gradients (ou les différentielles si on préfère) :

$$\nabla f = 2(x,y,z), \qquad \nabla g = 2(\left(x - \tfrac{1}{2}\right), y, 0);$$

on voit que ∇f et ∇g sont linéairement dépendants si et seulement si $z = y = 0$, en ajoutant les conditions $f = g = 0$ on doit avoir $x = +1$. Cela montre que en tout point de $V \setminus \{(1,0,0)\}$, la matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$$

est de rang constant $= 2$, et donc $V \setminus \{(1,0,0)\}$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^3$ (de codimension 2, et donc de dimension 1 = 3-2).

(c) Pour paramétriser la fenêtre de Viviani, il faut réfléchir un peu à sa géométrie. On constate qu'il s'agit d'une courbe fermée dont la projection sur le plan Oxy va parcourir deux fois le cercle de rayon 1/2 et de centre $(\frac{1}{2}, 0)$. Il semble donc raisonnable de tenter une paramétrisation

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}(\cos(2t) + 1), \frac{1}{2}\sin(2t), z(t) \right), \qquad \text{avec} \quad t \in [0, 2\pi],$$

où $z(z)$ est une fonction à déterminer. On remarque que pour n'importe quelle fonction $z(t)$ la courbe γ est tracée sur le cylindre, en particulier $g(\gamma(t)) = 0$ (on a écrit $\cos(2t)$ et $\sin(2t)$ car la projection de γ parcoure deux fois le cercle de rayon 1/2 et de centre $(\frac{1}{2}, 0)$).

Pour déterminer $z(t)$ il faut utiliser que $\gamma(t)$ appartient à la sphère unité, c'est-dire $f(\gamma(t)) = 0$ et donc $z^2(t) = 1 - x^2(t) - y^2(t)$. On calcule donc

$$\begin{aligned} z(t)^2 &= 1 - x^2(t) - y^2(t) \\ &= 1 - \frac{1}{4}\left(\cos(2t) + 1\right)^2 - \frac{1}{4}\sin^2(2t) \\ &= 1 - \frac{1}{4}\left(\cos^2(2t) + 2\cos(2t) + 1\right) - \frac{1}{4}\sin^2(2t) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)) \\ &= \sin^2(t). \end{aligned}$$

On peut donc paramétriser la courbe V par

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}(\cos(2t) + 1), \frac{1}{2}\sin(2t), \sin(t) \right), \qquad \text{avec} \quad t \in [0, 2\pi],$$

on remarque que $z(t) \geq 0$ lorsque $0 \leq t \leq \pi$ et $z(t) \leq 0$ lorsque $\pi \leq t \leq 2\pi$.

Finalement, le vecteur vitesse de γ est $\dot{\gamma}(t) = (-\sin(2t), \cos(2t), \cos(t))$ et la vitesse est $\|\dot{\gamma}\| = \sqrt{1 + \cos^2(t)} \geq 1$ pour tout t, la paramétrisation est régulière y compris au point double $q = \gamma(0) = \gamma(\pi)$.

B. Exercices supplémentaires.

Exercice 8.6. On a vu à l'exercice 7.3 que $O(n)$ et $SL_n(r)$ sont des sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

a) Décrire l'espace tangent $T_I SL_n(\mathbb{R})$ à la sous-variété $SL_n(r) \subset M_n(\mathbb{R})$ au point I (= la matrice identité).

b) Décrire l'espace tangent $T_I O(n)$ à la sous-variété $O(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ au point I.

Solution 8.6. (a) En se référant à l'exercice 7.3(c) et appliquant le théorème 3.17 au cas de la fonction déterminant, on voit que l'espace tangent $T_I SL_n(\mathbb{R})$ est le noyau de la forme linéaire

$$H \mapsto d(\det)_I(H) = \mathrm{Trace}(H).$$

Donc l'espace tangent en I à $SL_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de trace nulle. (on le note aussi $\mathfrak{sl}_n$ dans le cadre de la théorie des groupes classiques ou des groupes de Lie).

(b) On rappelle qu'au voisinage de $O(n)$, l'application

$$\Phi : A \mapsto AA^\mathsf{T}$$

est de rang constant. Sa différentielle en $A = I$ est donné par

$$d\Phi_I(H) = H + H^\mathsf{T}.$$

Le groupe $O(n)$ est défini par l'équation $\Phi(A) = I$. Par la proposition 3.17, son espace tangent à l'identité est donc donné par

$$T_I O(n) = \mathrm{Ker}\, d_I\Phi = \{H \in M_n(\mathbb{R}) \mid H + H^\mathsf{T} = 0\},$$

c'est l'ensemble des matrices anti-symétriques (on le note aussi $\mathfrak{o}(n)$ dans le contexte des groupes de Lie).