A. Exercices standards.

Exercice 7.1. Le but de cet exercice est de prouver que la différentielle de l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ en $A \in M_n(\mathbb{R})$ est l'application linéaire $d\det_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ donnée par la formule

$$d\det_A(H) = \operatorname{Tr}(\operatorname{Cof}(A)^\top H),$$

où $\operatorname{Cof}(A)$ est la matrice des cofacteurs de A.

On procède en trois étapes:

(1) Dans un premier temps démontrer la formule pour le cas $A = I$;

(2) Supposer ensuite que $A \in GL_n(\mathbb{R})$, i.e. que A est inversible;

(3) Finalement, conclure en utilisant le fait que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice $A + tI$ est inversible pour t suffisamment petit.

Solution 7.1. (1) Supposons d'abord que $A = I$, nous devons analyser le développement de $\det(I+H)$ pour une matrice H de norme assez-petite. Écrivons les matrices $n \times n$ comme des n-tuples de vecteurs colonnes :

$$I = (E_1, E_2, \dots, E_n), \qquad H = (H_1, H_2, \dots, H_n])$$

où E_j est le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique. On a alors avec les propriétés su déterminant:

$$\begin{aligned}
\det(I+H) &= \det(E_1 + H_1, E_2 + H_2, \dots, E_n + H_n) \\
&= \det(E_1, E_2, \dots, E_n) + \det(H_1, E_2, \dots, E_n) + \det(E_1, H_2, \dots, E_n) \\
&\quad \cdots + \det(E_1, E_2, \dots, H_n) + \rho(H) \\
&= \det(I) + \operatorname{Trace}(H) + \rho(H).
\end{aligned}$$

Ici $\rho(H)$ contient tous les déterminants qui contiennent plus de deux colonnes H_j, par exemple $\det(H_1, H_2, \dots, E_n)$. On a alors $\rho(H) = o(\|H\|)$ et par conséquent $\det(I+H) - \det(I) = \operatorname{Trace}(H) + o(\|H\|)$, et donc

$$d\det_I(H) = \operatorname{Trace}(H).$$

Autre raisonnement possible pour cette première étape (à partir de la formule du déterminant) :

$$\begin{aligned}
\det(I+H) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)(\delta_{\sigma(1)1} + h_{\sigma(1)1}) \cdots (\delta_{\sigma(n)n} + h_{\sigma(n)n}) \\
&= \delta_{11} \dots \delta_{nn} + \sum_{i=1}^n h_{ii} \ + \text{termes de degré} \geq 2 \text{ en } h_{ij} \\
&= 1 + \operatorname{Tr}(H) + o(\|H\|) \\
&= \det(I) + \operatorname{Trace}(H) + o(\|H\|).
\end{aligned}$$

D'où $d\det_I(H) = \operatorname{Tr}(H)$.

(2) Supposons ensuite que $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors par multiplicativité du déterminant et la formule précédente on a

$$\begin{aligned}
\det(A+H) &= \det(A(I + A^{-1}H)) \\
&= \det(A)\det(I + A^{-1}H) \\
&= \det(A)(1 + \mathrm{Tr}(A^{-1}H) + o(\|A^{-1}H\|)) \\
&= \det(A) + \mathrm{Tr}(\det(A)A^{-1}H) + o(\|H\|) \\
&= \det(A) + \mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(A)^\top H) + o(\|H\|).
\end{aligned}$$

Ainsi $d\det_A(H) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(A)^\top H)$.

(3) Finalement, si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est quelconque, alors pour $t > 0$ suffisamment petit, la matrice $A + tI$ est inversible (à méditer!). Or par continuité, on a évidemment

$$\mathrm{Cof}(A + tI) \xrightarrow{t \to 0} \mathrm{Cof}(A),$$

donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(A + tI)^\top H) \longrightarrow \mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(A)^\top H)$ et on a obtenu en toute généralité la différentielle du déterminant:

$$d\det_A(H) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(A)^\top H).$$

Exercice 7.2. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière plane de classe C^2 et $r \geq 0$. On appelle *courbe parallèle* à γ à distance r la courbe $\gamma_r(t) = \gamma(t) + r\mathbf{N}_\gamma(t)$ (où $\mathbf{N}_\gamma = \mathbf{J}(\mathbf{T}_\gamma)$ est le champ de vecteurs normal à γ).

(a) Calculer la courbure $\kappa_r(t)$ de la courbe parallèle γ_r (en fonction de r et de t).

(b) Montrer que la fonction $r \mapsto \kappa_r$ satisfait l'équation différentielle de Ricatti : $\dfrac{\partial \kappa}{\partial r} = \kappa^2$.

(c) Supposons que $q = \inf\limits_{t \in I} \dfrac{1}{|\kappa(t)|} > 0$. Montrer que l'application $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(r,t) = \gamma_r(t)$ est une immersion pour tout $\varepsilon \leq q$.

(d) Expliciter le cas du cercle de rayon a centré en 0.

(e) Expliquer pourquoi l'affirmation du point (c) n'est pas correcte pour $\varepsilon > q$.

Remarque. Cet exercice montre en particulier que localement, dans un voisinage de la courbe, on peut construire un système de coordonnées curviligne dont l'une des coordonnées est l'abscisse curviligne de la courbe et l'autre est la distance orientée à la courbe. Ces coordonnées s'appellent des *coordonnées de Fermi.*

Solution 7.2. (a) Supposons γ paramétrée normalement, alors on a (en utilisant les équations de Serret-Frenet pour les courbes planes):

$$\dot{\gamma}_r(s) = \dot{\gamma}(s) + r\dot{\mathbf{N}}(s) = (1 - r\kappa(s))\mathbf{T}(s).$$

Donc

$$\ddot{\gamma}_r(s) = (1 - r\kappa(s))\dot{\mathbf{T}}(s) - r\dot{\kappa}(s)\mathbf{T}(s) = (1 - r\kappa(s))\kappa(s)\mathbf{N}(s) - r\dot{\kappa}(s)\mathbf{T}(s),$$

La courbure κ_r de γ_r est donc donnée par

$$\kappa_r(s) = \frac{\dot{\gamma}_r(s) \wedge \ddot{\gamma}_r(s)}{\|\dot{\gamma}_r(s)\|^3} = \frac{\kappa(s)}{1 - r\kappa(s)}.$$

(b) C'est un calcul élémentaire : $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\kappa(s)}{1-r\kappa(s)}\right) = \left(\frac{\kappa(s)}{1-r\kappa(s)}\right)^2$ (le point important est que cette remarque illustre l'importance de l'équation de Ricatti en lien avec la courbure en géométrie différentielle).

(c) Les dérivées partielles de l'applications $f(r,s) = \gamma(s) + r\mathbf{N}_\gamma(s)$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \mathbf{N}_\gamma(s), \quad \frac{\partial f}{\partial s} = (1 - r\kappa(s))\mathbf{T}_\gamma(s).$$

Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants en tout point tel que $(1-r\kappa(s)) \neq 0$, cette condition est garantie par les hypothèses ($|r| < 1/|\kappa(s)$).

(d) Le cercle de rayon a est de courbure $1/a$. L'application f est donc définie pour $(r,\theta) \in (-a,a) \times [0,2\pi]$ par

$$f(r,\theta) = ((a-r)\cos(\theta), (a-r)\sin(\theta)).$$

On remarque que f peut être définie sur le domaine $(-\infty, a) \times [0,2\pi]$, et que cette application est une simple variante des coordonnées polaires du plan.

(e) Le calcul en (c) montre que $\frac{\partial f}{\partial s}(r,s) = 0$ si $r\kappa(s) = 1$. Donc si le domaine de f contient un tel point, alors f n'est pas une immersion.

Rappelons que le point $f(\frac{1}{\kappa(s)}, s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{N}_\gamma(s)$ est le centre du cercle osculateur de γ en s, et la courbe $s \mapsto f(\frac{1}{\kappa(s)}, s)$ est la développée de γ. La développée de γ, qui est aussi l'enveloppe de ses normales, représente une frontière du domaine de régularité des coordonnées de Fermi.

Exercice 7.3. (a) Le cône $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = (az)^2\}$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ (on suppose $a \neq 0$) ?

(b) Prouver qu'il existe une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^6$ qui est homéomorphe à $S^2 \times S^2$ (le produit cartésien de deux sphères).

(c) Prouver que le groupe linéaire spécial

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

est une sous-variété différentiable de $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n\times n}$. Quelle est sa dimension ?

(d) (*) Prouver que le groupe orthogonal $O(n)$ est une sous-variété différentiable de $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n\times n}$. Quelle est sa dimension ?

Remarque : Les sous-ensembles de $GL_n(\mathbb{R})$ qui sont à la fois des sous-groupes et des sous-variétés s'appellent les *groupes classiques*. Ce sont des exemples de groupes de Lie (en fait les plus importants). Des exemples de groupes classiques sont $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$, $SU_n(\mathbb{C})$, et $SP_{2n}(\mathbb{R})$ (le groupe symplectique).

Solution 7.3. (a) Le cône C est l'ensemble $f^{-1}(0)$ où $f(x,y,z) = x^2+y^2-(az)^2$. La différentielle de f au point (x,y,z) est $df = 2xdx + 2ydy - 2a^2zdz$. Cette différentielle est non nulle si $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ donc le cône $C \setminus \{0\}$ privé de l'origine est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Par contre la différentielle de f en 0 est nulle, cela suggère que peut-être le cône n'est pas une variété. Pour le voir, on considère un voisinage quelconque $U \subset C$ de 0. Il est facile de vérifier que $U \setminus \{(0,0,0)\})$ n'est pas connexe, or tout point d'une variété admet des voisinages connexes. Nous concluons que C n'est pas une variété.

(b) On considère l'application $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (f_1(x_1,x_2,x_3,),f_2(x_4,x_5,x_6)) = \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1, x_4^2+x_5^2+x_6^2-1\right).$$

Il est facile de vérifier que $M = f^{-1}(0,0) \subset \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ est homéomorphe à un produit de deux sphères. Nous devons vérifier que c'est une sous-variété différentiable. La matrice jacobienne de f est la matrice 2×6 suivante :

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2x_4 & 2x_5 & 2x_6 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 2 sur le complémentaire de l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^6 \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^6 \mid x_4 = x_5 = x_6 = 0\}$$

(sur l'ensemble $\mathcal{S}$ le rang de Df est 1 sauf à l'origine où ce rang est nul). En particulier le rang de f est constant égale à 2 au voisinage de M, donc $M \subset \mathbb{R}^6$ est une sous-variété différentiable de codimension 2 (et de dimension 6-2 = 4).

Il est clair que cette application est une forme linéaire non-nulle si $\det(A) = 1$ car dans ce cas on a $d(\det)_A(H) = \mathrm{Trace}\left(A^{-1}H\right)$, et 1 est donc une valeur régulière de la fonction déterminant. Ainsi l'équation $\det(A) = 1$ définit une sous variété de codimension $1 = \dim(\mathbb{R})$, et donc de dimension $n^2 - 1$.

(c) Le groupe linéaire spécial $SL_n(\mathbb{R})$ est le groupe des $n \times n$ matrices réelles de déterminant 1 :

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$

L'application déterminant est C^∞ et on a vu à l'exercice 7.1 que sa différentielle en A est la forme linéaire

$$H \mapsto d(\det)_A(H) = \mathrm{Trace}\left(\mathrm{Cof}(A)^\top H\right).$$

Pour une matrice inversible, on a toujours $\mathrm{Cof}(A) \neq 0$ (à cause de l'identité $A \cdot \mathrm{Cof}(A)^\top = I_n$). Donc $d\det_A$ défini une forme linéaire non nulle sur $M_n(\mathbb{R})$ et en particulier l'application

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

est de rang constant $r = 1$ au voisinage de $SL_n(\mathbb{R})$. En appliquant le théorème 3.15 (A) on déduit que $SL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété différentiable de codimension 1 et donc de dimension $n^2 - 1$.

(d) Le groupe orthogonal $O(n)$ est le sous-ensemble $O(n) = f^{-1}(0)$ où $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ est l'application

$$f(A) = A^\top A - \mathrm{I}_n.$$

Cette application est de classe C^∞. Nous allons montrer que f est de rang constant au voisinage de $O(n)$. Calculons d'abord la différentielle de f en $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} f(A+H) &= (A+H)^\top (A+H) - I_n = A^\top A + A^\top H + H^\top A + H^\top H - I_n \\ &= f(A) + \left(A^\top H + H^\top A\right) + o(\|H\|) \end{aligned}$$

Par conséquent la différentielle de f est

$$df_A = A^\top H + H^\top A.$$

Pour trouver le rang de df_A, nous pouvons calculer son noyau :

$$\mathrm{Ker}\,(df_A) = \{H \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^\top H = -H^\top A\} = \{H \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^\top H \text{ est antisymétrique}\}.$$

L'ensemble des matrices antisymétrique est un sous-espace vectoriel de dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ de $M_n(\mathbb{R})$. Donc si A est inversible, alors l'ensemble des matrices H telles que $A^\top H$ est antisymétrique est aussi un sous-espace vectoriel de dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$. On a donc

$$\operatorname{rang}(df_A) = n^2 - \dim \operatorname{Ker}(df_A) = n^2 - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Comme toute matrice de $O(n)$ est inversible, on conclut que le rang de f au voisinage de $O(n)$ est constant égale à $\frac{1}{2}n(n+1)$. Cela prouve que $O(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de codimension $\frac{1}{2}n(n+1)$ et donc de dimension

$$\dim(O(n)) = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Par exemple $\dim O(2) = 1$, $\dim O(3) = 3$, $\dim O(4) = 6$.

Exercice 7.4. (Exercice sur les variétés de type quadrique)

(a) Rappeler ce qu'est une *forme quadratique* sur un espace vectoriel.

(b) Soit $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Prouver que Q est différentiable. Que vaut sa différentielle en un point $x \in \mathbb{R}^n$?

(c) Que dit le *théorème de Sylvester* de l'algèbre linéaire ? Qu'est-ce que la *signature* d'une forme quadratique ? Que signifie la condition Q *est non dégénéré* pour une forme quadratique ?

(d) Prouver que si $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée, alors l'hypersurface $Q^{-1}(c)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ pour tout $c \neq 0$. Quelle est sa dimension ?

(e) Est-ce que l'ensemble $S_0(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété ? *L'ensemble* $S_0(Q)$ *s'appelle le* cône isotrope *de la forme quadratique* Q

(f) Les hypersurfaces

$$S_+(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = +1\} \quad \text{et} \quad S_-(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = -1\}$$

s'appellent les *indicatrices positives et négatives* de la forme quadratique Q. Montrer que Q est entièrement déterminé par les deux indicatrices et le cône isotrope, i.e. si Q_1 et Q_2 sont deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$S_0(Q_1) = S_0(Q_2), \quad S_+(Q_1) = S_+(Q_2), \quad S_-(Q_1) = S_-(Q_2),$$

alors $Q_1 = Q_2$.

Solution 7.4. (a) Une forme quadratique est une application $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forme

$$Q(x) = B(x, x),$$

où B est une forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^n$.

(b) On calcule le développement limité de Q en $x \in \mathbb{R}^n$:

$$Q(x+h) = B(x+h, x+h) = Q(x) + 2B(x,h) + Q(h).$$

Clairement $Q(h) = B(h,h) = o(\|h\|)$, donc:

$$dQ_x(h) = 2B(x,h).$$

Remarque. Par définition, la forme bilinéaire B détermine la forme quadratique Q. La formule que nous venons d'établir montre que réciproquement, la forme bilinéaire symétrique B est déterminée par la forme quadratique Q.

Rappelons qu'on peut aussi retrouver B par la formule de polarisation:

$$B(x,y) = \frac{1}{4}(Q(x+y) - Q(x-y)).$$

(c) Le théorème de Sylvester assure pour toute forme bilinéaire symétrique B l'existence d'une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de B dans cette base est de la forme diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_q & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

où p et q sont des entiers. Dans cette base, la forme quadratique s'écrit

$$Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

Le couple (p,q) s'appelle la *signature* de Q et $r = p+q$ est le rang. La forme quadratique Q est dite *non-dégénérée* si $r = n$. Si $(p,q) = (n,0)$ on dit que Q est définie positive et si $(p,q) = (0,n)$ on dit que Q est définie négative.

(d) Si Q est non-dégénérée et a est un vecteur non-nul alors

$$dQ_a = 2B(a,\cdot)$$

est une forme linéaire non-nulle. C'est donc une application linéaire de rang $r = 1$. Ceci prouve que la fonction Q est de rang constant $r = 1$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et par le théorème 3.15, on en déduit que $Q^{-1}(c)$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ (i.e. une sous-variété de codimension 1) pour tout $c \in \mathbb{R}$ non nul.

(e) Le vecteur nul $0 \in \mathbb{R}^n$ est un point critique de Q. En général le cône isotrope $Q^{-1}(0)$ n'est pas une variété (sauf le cas trivial ou Q est définie positive ou définie négative et $Q^{-1}(0) = \{0\}$ est un point). Par exemple, si $Q(x,y) = x^2 - y^2$, alors le cône isotrope est $Q^{-1}(0)$ est la réunion de deux droites perpendiculaires, ce n'est pas une sous-variété.

(f) Soient Q_1, Q_2 vérifiant les hypothèses en (b) et soit $x \in \mathbb{R}^n$, on doit prouver que $Q_1(x) = Q_2(x)$. On distingue trois cas.

  (i) Si $\alpha = Q_1(x) > 0$, on pose $x' = x/\sqrt{\alpha}$. Alors $x' \in S_+(Q_1) = S_+(Q_2)$. Donc $Q_2(x') = 1$ et on a $Q_2(x) = \alpha Q_2(x') = \alpha = Q_1(x)$.

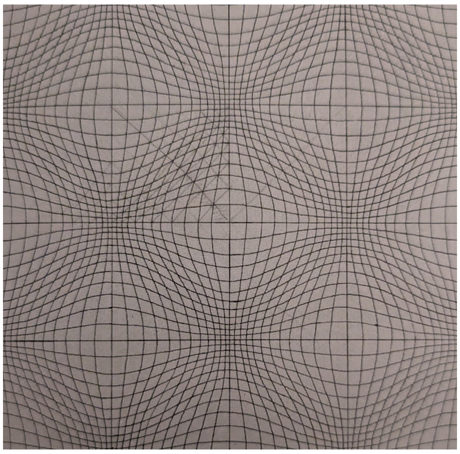
  (ii) Si $\alpha = Q_1(x) < 0$, on pose $x' = x/\sqrt{-\alpha}$. Alors $x' \in S_-(Q_1) = S_-(Q_2)$. Donc $Q_2(x') = -1$ et on a $Q_2(x) = (-\alpha)Q_2(x') = \alpha = Q_1(x)$.

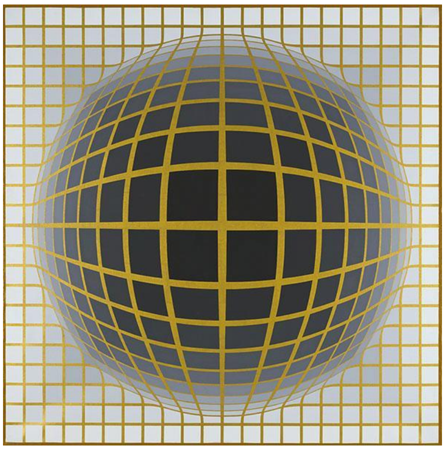
  (iii) Si $\alpha = Q_1(x) = 0$, alors $x \in S_0(Q_1) = S_0(Q_2)$ et donc $Q_2(x) = 0$.

On a démontré que dans tous les cas $Q_2(x) = Q_1(x)$.

B. Exercices supplémentaires

Exercice 7.5. Cet exercice est à faire en groupe: Les images ci-dessous sont des créations des artistes Maurits Cornelis Escher en 1953 (à gauche) et Victor Vasarely en 1968 (à droite).
Expliquer à votre façon *en quoi on peut interpréter ces images comme représentant des systèmes de coordonnées curvilignes dans un domaine du plan* (discutez entre vous et rédigez un petit essai).





Solution 7.5. (Une rédaction possible...)
Un système de coordonnées curviligne est essentiellement la même chose qu'un difféomorphisme d'un domaine $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ vers un autre domaine $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$; cependant on interprète pas ce difféomorphisme comme agissant en déplaçant les points de U, mais plutôt comme *définissant des nouvelles coordonnées* (en général non linéaires) sur le domaine Ω_1.

Rappelons la définissions précise du cours dans le cas d'un ouvert du plan : *un système de coordonnées curviligne de classe C^k sur l'ouvert $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ est la donnée de 2 fonctions $u, v : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ telles que l'application*

$$\phi : (x, y) \mapsto (u, v)$$

décrit un difféomorphisme de classe C^k de Ω_1 vers un ouvert $\Omega_2 = \phi(\Omega_1) \subset \mathbb{R}^2$.

Le système de coordonnées permet de définir deux familles de courbes dans Ω_1. Pour chaque $(u_0, v_0) \in \Omega_2$ on peut définir deux courbes :

$$\{(x, y) \in \Omega_1 \mid v(x, y) = v_0\}, \qquad \{(x, y) \in \Omega_1 \mid u(x, y) = u_0\}.$$

Ces deux familles de courbes forment le réseau de coordonnées curviligne dans le domaine Ω_1. Chaque point $p_0 \in \Omega_1$ peut être représenté par ses coordonnées cartésiennes (x_0, y_0) ou par ses coordonnées curvilignes (u_0, v_0). Dans ces représentations concrètes, on peut localiser le point p_0 à partir de ses coordonnées curvilignes (dans les limites de la précisions donnée par la taille de la grille).

Ces deux images utilisent des grilles déformées pour créer des illusions de profondeur et de mouvement dans le plan, ce qui est précisément l'objectif d'un système de coordonnées curvilignes. Elles transforment la perception d'un espace rectiligne en un espace courbe, où chaque point est décrit selon une géométrie locale influencée par la déformation imposée par l'artiste.

Exercice 7.6. (*) On note $\hat{\mathbb{R}}^n$ l'ensemble $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, où $\{\infty\}$ est un point supplémentaire qui n'appartient pas à $\mathbb{R}^n$. On définit sur cet ensemble une topologie pour laquelle $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\hat{\mathbb{R}}^n$ et la topologie induite est la topologie usuelle et les voisinages ouverts du point ∞ sont les ensembles du type $\mathbb{R}^n \setminus K$ où K est un compact de $\mathbb{R}^n$.

On considère ensuite l'application $f := \hat{\mathbb{R}}^n \to \hat{\mathbb{R}}^n$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = p, \\ p & \text{si } x = \infty, \\ p + k\dfrac{x-p}{\|x-p\|^2} & \text{si } x \notin \{p, \infty\}. \end{cases}$$

où p est un point de $\mathbb{R}^n$ et k est un réel strictement positif. Cette application s'appelle l' *inversion de centre $p \in \mathbb{R}^n$ et de module $k > 0$, c'est une application qui joue un rôle important en géométrie et en analyse.*

Répondre aux questions suivantes :

(a) Décrire toutes les suites convergentes de $\hat{\mathbb{R}}^n$ (on ne demande pas de donner une preuve rigoureuse mais seulement d'expliquer quelles sont les suites convergentes).

(b) Décrire l'ensemble des points fixes de f, c'est-à-dire l'ensemble $\{x \in \hat{\mathbb{R}}^n \mid f(x) = x\}$.

(c) Prouver que f est un homéomorphisme de $\hat{\mathbb{R}}^n$. Quel est son inverse ?
Prouver aussi que f définit par restriction un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ dans lui-même.

(d) Prouver que si $n = 2$, f définit une application anti-holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{p\}$.

(e) Calculer la différentielle $df_x(h)$ en un point $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$.

(f) Prouver que f est une application conforme sur $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ (une application est dite *conforme* si elle préserve les angles, concrètement il s'agit de prouver que df_x est une similitude de $\mathbb{R}^n$).

(g) Quel est le rapport de similitude de $df_x(h)$?

Cet exercice est important d'une part parce que l'inversion est une application importante en géométrie, et d'autre part parce qu'il donne l'occasion de s'entraîner au calcul différentiel.

Solution 7.6. (a) Une suite $\{x_j\}$ de $\hat{\mathbb{R}}^n$ est convergente si et seulement si elle est de l'un des deux types suivants :

(i) ou bien $x_j \neq \infty$ pour j assez grand et la suite converge dans le sens usuel vers un point de $\mathbb{R}^n$,

(ii) ou bien elle s'échappe de tout compact, i.e. pour tout $R > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $j \leq N$, alors ou bien $x_j = \infty$ ou bien $\|x_j\| \geq R$; et dans ce cas la suite converge vers le point ∞.

(b) Les points fixes sont les solutions de l'équation $f(x) = x$. Cette équation peut s'écrire

$$x - p = k\frac{x-p}{\|x-p\|^2},$$

c'est-à-dire $\frac{k}{\|x-p\|^2} = 1$: c'est la sphère centrée en p de rayon $r = 1/\sqrt{k}$.

Remarque : Géométriquement, l'inversion f fixe la sphère de centre p et de rayon $r = 1/\sqrt{k}$. De plus elle envoie les points à l'intérieur de cette sphère sur son extérieur et les points à l'extérieur dans son intérieur. L'inversion échange donc l'intérieur et l'extérieur de la sphère. Elle échange aussi le centre de la sphère avec le point à l'infini.

(d) Commençons par chercher l'inverse de f, cela nous confirmera que f est bijective. On vérifiera ensuite que f est un homéomorphisme (i.e. que f et son inverse sont continues).

Pour chercher l'inverse de f on doit résoudre l'équation $f(x) = y$ en x. Il est clair que si $y = \infty$ alors $x = p$ et si $y = p$ alors $x = \infty$. Considérons le cas (général) $y \notin \{p, \infty\}$. On a

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad (y-p) = k\frac{x-p}{\|x-p\|^2} = \lambda \cdot (x-p), \quad \text{avec } \lambda = \frac{k}{\|x-p\|^2}.$$

En particulier on voit que $(y-p)$ et $(x-p)$ sont proportionnels. De plus, puisque $k > 0$ on peut prendre les normes dans l'identité ci-dessus et écrire

$$\|y-p\|\|x-p\| = k.$$

Dans cette relation x et y jouent un rôle symétrique, on a donc

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad (y-p) = k\frac{x-p}{\|x-p\|^2} \quad \Leftrightarrow \quad (x-p) = k\frac{y-p}{\|y-p\|^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y).$$

L'application f est donc bijective et c'est son propre inverse (on dit parfois que f est une involution).

La fonction $x \mapsto \dfrac{k}{\|x-p\|^2}$ est est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$, c'est donc aussi le cas de l'application $f(x) = p + k\dfrac{x-p}{\|x-p\|^2}$. Par conséquent $f = f^{-1}$ est un difféomorphisme de l'ouvert $U = \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ dans lui-même.

Il faut encore montrer que f est un homéomorphisme de $\hat{\mathbb{R}}^n$ l'image inverse d'un voisinage de p est un voisinage de ∞ et . Il est clair par ce qui précède que f est continue en tout point de $\hat{\mathbb{R}}^n \setminus \{p, \infty\}$, il reste donc à montrer que l'image inverse d'un voisinage de p est un voisinage de ∞ et l'image inverse d'un voisinage de ∞ est un voisinage de p.
Soit donc $W \subset \hat{\mathbb{R}}^n$ un voisinage du point p; alors il existe $t > 0$ tel que

$$W \supset B(p,t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-p\| < t\}.$$

On vérifie facilement que

$$f^{-1}(W) = f(W) \supset \{y \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \mid \|y-p\| > \tfrac{1}{t}\} \cup \{\infty\},$$

qui est bien un voisinage du point ∞ par définition de la topologie sur $\hat{\mathbb{R}}^n$.
On montre de façon semblable que l'image inverse d'un voisinage de ∞ est un voisinage de p.

On peut aussi raisonner avec les suites convergentes car on vérifie facilement que si $\{x_j\} \subset \hat{\mathbb{R}}^n$ est une suite qui converge vers p, alors $y_j = f(x_j)$ converge vers ∞ et si $\{x_j\} \subset \hat{\mathbb{R}}^n$ converge vers ∞, alors $y_j = f(x_j)$ converge vers p.

On a prouvé que l'application f est bijective, continue et son inverse $f^{-1} = f$ est également continue. Par conséquent f est un homéomorphisme de $\hat{\mathbb{R}}^n$ dans lui-même.

(d) Si on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et (x_1, x_2) à $z = x_1 + ix_2$, l'inversion s'écrit

$$f(z) = p + \frac{z-p}{|z-p|^2} = p + \frac{1}{\overline{(z-p)}},$$

qui est la conjuguée complexe de l'application holomorphe $h(z) = p + \frac{1}{(z-p)}$.

(e) Il y a plusieurs façons de calculer une différentielle. L'une de ces méthodes est de partir de

$$df_x(h) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x+th).$$

Nous allons utiliser cette méthode. Commençons par remarquer qu'il devrait être clair que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \|x+th-p\|^2 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle x+th-p, x+th-p\rangle = 2\langle h, x-p\rangle,$$

et donc

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\frac{1}{\|x+th-p\|^2}\right) = -2\frac{\langle h, x-p\rangle}{\|x-p\|^4}.$$

Il est maintenant facile de calculer la différentielle de f:

$$df_x(h) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} k\left(\frac{x+th-p}{\|x+th-p\|^2}\right) = k\frac{h}{\|x-p\|^2} - 2k\frac{\langle h, x-p\rangle}{\|x-p\|^4}(x-p),$$

que l'on peut écrire

$$df_x(\mathbf{h}) = k \cdot \frac{\|x-p\|^2 \cdot \mathbf{h} - 2\langle h, x-p\rangle \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p})}{\|x-p\|^4}$$

(ici on a écrit en gras les quantités vectorielles pour les mettre en évidence).

(f) On remarque que si $h \perp (x-p)$, alors $df_x(h) = \frac{k}{\|x-p\|^2}h$ et si h est un multiple de $(x-p)$, alors $df_x(h) = -\frac{k}{\|x-p\|^2}h$.

On en conclut que df_x est la composition de la symétrie orthogonale à travers l'hyperplan $(x-p)^\perp$ avec l'homothétie de rapport $\lambda = \frac{k}{\|x-p\|^2}$.

(g) Par le point précédent, on constate que $df_x(h)$ est une similitude de rapport λ.