

### Objectifs pour cette série :

Dans cette série on étudie la courbure des courbures planes et sa signification géométrique.

On commence aussi une révision du calcul différentiel.

### A. Exercices standards.

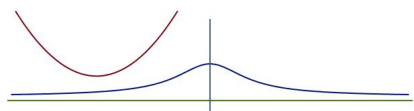
**Exercice 6.1.** (a) Soit  $\gamma$  une courbe plane dont la courbure  $k$  est une fonction monotone de l'abscisse curviligne. Cette courbe peut-elle être une courbe  $C^2$  fermée ?

(b) Considérons les courbes planes suivantes : un cercle, une ellipse, une parabole, que l'on paramétrise naturellement. Pour chacune de ces courbes, représenter qualitativement le graphe de la fonction  $s \rightarrow k(s)$  (ce graphe s'appelle le *diagramme de courbure* de la courbe considérée).

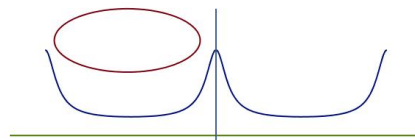
**Solution 6.1.** (a) La réponse est négative, sauf dans le cas d'un cercle. En effet, si  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe  $C^2$  fermée, alors on a  $k(\ell) = k(0)$ . La courbure ne peut donc pas être monotone, sauf si elle est constante, auquel cas il s'agit d'un cercle.

(b) Rappelons que le *diagramme de courbure* d'une courbe plane  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$  est la courbe  $t \rightarrow (s(t), k(t))$  où  $s(t)$  est l'abscisse curviligne depuis le point initial en  $s_0 = a$  et  $k(t)$  est la courbure orientée (lorsque  $\gamma$  est paramétrée naturellement, il s'agit donc simplement du graphe de la fonction  $k = k(s)$ ).

Pour un cercle de rayon  $r$  parcouru dans le sens positif, on a  $k = 1/r$ , le diagramme de courbure est représenté par la fonction constante  $k = 1/r$ .

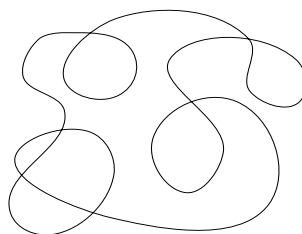


Une parabole et son diagramme de courbure



Une ellipse et son diagramme de courbure

**Exercice 6.2.** Que vaut l'intégrale  $\int_{\gamma} \kappa \, ds$  pour la courbe suivante ?



**Solution 6.2.** Rappelons que  $\int_{\gamma} \kappa \, ds$  représente la variation totale de la fonction angulaire  $\varphi$  (car  $d\varphi = \kappa(s)ds$ ). Pour résoudre l'exercice il faut choisir un sens de parcours sur la courbe, et compter le nombre de tour effectués par le vecteur tangent  $\mathbf{T}$  lorsqu'un point représentatif parcourt la courbe.

Cela peut aider de repérer les points d'inflexions et les arcs où la courbe est concave ou convexe. En orientant la courbe de façon qu'en son point le plus élevé elle se dirige vers la gauche, on trouve alors que  $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \kappa ds = 3$  (avec l'autre orientation on a  $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \kappa ds = -3$ ).

---

**Exercice 6.3.** Le tracé d'une route ou d'une voie de chemin de fer est habituellement constitué de segments de droites, d'arcs de cercles et d'arcs de chloïdes.

Voir [https://fr.wikipedia.org/wiki/Trac%C3%A9\\_en\\_plan\\_\(route\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Trac%C3%A9_en_plan_(route)).

(a) Rappeler ce qu'est une chloïde.

(b) Pour quelle raison, à votre avis, on utilise des arcs de chloïdes dans les tracés ferroviaires ?

**Solution 6.3.** (a) Une chloïde est une courbe plane dont la courbure orientée est une fonction linéaire ou affine de l'abscisse curviligne :  $k(s) = as + b$ .

(b) Un véhicule qui se déplace à vitesse constante sur une route subit une force de frottement et une force proportionnelle à la courbure de sa trajectoire (et au carré de la vitesse); voir la formule de l'accélération. Des arcs de chloïdes permettent ainsi de tracer des virages dans lesquels cette force croît de façon linéaire et est ainsi progressive et prévisible... et donc plus sûre.

<https://couleur-science.eu/?d=d42313--la-spirale-deuler-ou-le-trace-des-routes>

---

**Exercice 6.4.** Un peu de calcul différentiel :

(a) Calculer la différentielle (au sens de Frechet)  $d\varphi_A(H)$  de l'application  $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  définie par  $\varphi(A) = A^3$ , pour  $A, H \in M_n(\mathbb{R})$  quelconques. Que peut-on dire du cas particulier où  $A$  et  $H$  commutent ?

(b) On considère deux applications différentiables  $\phi, \psi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ . Montrer la version suivante de la règle de Leibniz :

$$d(\phi \cdot \psi)_A(H) = d\phi_A(H)\psi(A) + \phi(A)d\psi_A(H),$$

où  $(\phi \cdot \psi)(A) = \phi(A) \cdot \psi(A)$  (produit matriciel).

(c) En utilisant le résultat précédent, montrer que si  $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  est définie par  $\phi(A) = A^{-1}$ , alors

$$d\phi_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$

**Solution 6.4.** Il y a deux méthodes pour calculer la différentielle d'une application. On peut appliquer la définition de la différentielle de Frechet (ce qui revient à faire un développement limité de l'application à l'ordre 1), ou alors on peut calculer la dérivée directionnelle. Selon la situation, l'une ou l'autre de ces méthodes est plus simple, parfois elles sont de difficultés équivalentes.

(a) (Par développement limité). On calcule  $\varphi(A + H)$  :

$$\begin{aligned} \varphi(A + H) &= (A + H)(A^2 + AH + HA + H^2) \\ &= (A + H)^3 = A^3 + A^2H + AHA + AH^2 + HA^2 + HAH + H^2A + H^3 \\ &= A^3 + A^2H + AHA + HA^2 + o(\|H\|). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\varphi(A + H) - \varphi(A) = A^2H + AHA + HA^2 + o(\|H\|),$$

et donc

$$d\varphi_A(H) = A^2H + AHA + HA^2.$$

Dans le cas où  $A$  et  $H$  commutent, i.e.  $AH = HA$ , on obtient l'expression plus simple  $d\varphi_A(H) = 3A^2H$ .

Voyons comment obtenir ce résultat en calculant la dérivée directionnelle :

$$\begin{aligned} d\varphi_A(H) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(A + tH) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (A + tH)^3 \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [A^3 + t(A^2H + AHA + HA^2) + t^2(AH^2 + HAH + H^2A) + t^3H^3] \\ &= A^2H + AHA + HA^2. \end{aligned}$$

(b) On raisonne selon le développement limité :

$$\begin{aligned} (\phi \cdot \psi)(A + H) - (\phi \cdot \psi)(A) &= \phi(A + H) \cdot \psi(A + H) - \phi(A) \cdot \psi(A) \\ &= (\phi(A) + d\phi_A(H) + o(\|H\|)) \cdot (\psi(A) + d\psi_A(H) + o(\|H\|)) - \phi(A)\psi(A) \\ &= d\phi_A(H)\psi(A) + \phi(A)d\psi_A(H) + o(\|H\|). \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que  $d\phi_A(H) \cdot d\psi_A(H) = o(\|H\|)$ , puisque  $d\phi_A$  et  $d\psi_A$  sont des applications linéaires et donc leur produit est une application quadratique. Nous concluons que

$$d(\phi \cdot \psi)_A(H) = d\phi_A(H)\psi(A) + \phi(A)d\psi_A(H).$$

(c) On applique la formule en (b) aux applications  $\phi(A) = A^{-1}$  et  $\psi(A) = A$ . On a clairement  $(\phi \cdot \psi)(A) = I$  pour tout  $A$ , donc  $d(\phi \cdot \psi)_A = 0$ . Il est également clair que  $d\psi_A(H) = H$ . On a donc

$$0 = d(\phi \cdot \psi)_A(H) = d\phi_A(H) \cdot \psi(A) + \phi(A) \cdot d\psi_A(H) = d\phi_A(H) \cdot A + A^{-1} \cdot H.$$

Donc  $d\phi_A(H) \cdot A = -A^{-1} \cdot H$  et par conséquent

$$d\phi_A(H) = -A^{-1} \cdot HA^{-1}.$$

**Remarque.** Lorsque  $H$  commute avec  $A$ , i.e.  $AH = HA$ , alors on a  $d\phi_A(H) = -A^{-2} \cdot H$ , qu'on peut comparer avec la formule du calcul différentiel classique qui dit que la dérivée de  $1/x$  est  $-1/x^2$ .

**Exercice 6.5.** Prouver que l'application :  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  données par

$$(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) = (x_1 \cos(x_2), x_2 - x_1 x_2)$$

est un difféomorphisme au voisinage de  $(0, 0)$ .

**Solution 6.5.** On calcule la matrice Jacobienne de  $f$  en un point  $(x_1, x_2)$  :

$$Df_{(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x_2) & -x_1 \sin(x_2) \\ -x_2 & (1 - x_1) \end{pmatrix}.$$

La jacobien de  $f$ , c'est-à-dire le déterminant de  $Df$  est donc

$$J_f(x_1, x_2) = \det(Df_{(x_1, x_2)}) = (1 - x_1) \cos(x_2) - x_1 x_2 \sin(x_2).$$

En  $(0, 0)$ , on a  $J_f(x_1, x_2) = 1$  qui est non nul, donc  $Df_{(0,0)}$  est inversible et par le théorème d'inversion locale, on sait qu'il existe un voisinage  $U \subset \mathbb{R}^2$  de  $(0, 0)$  tel que la restriction de  $f$  à  $U$  est un difféomorphisme sur son image.

---

**Exercice 6.6.** a.) Rappeler la définition de la notion de *système de coordonnées curviligne*.

b.) Prouver l'affirmation suivante ou donner un contre-exemple : Si  $\{x_1, x_2\}$  et  $\{y_1, y_2\}$  sont deux systèmes de coordonnées curvilignes sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et si  $y_2 = x_2$ , alors  $\frac{\partial}{\partial y_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}$ .

**Solution 6.6.** a.) La définition est dans le polycopié : Un *système de coordonnées curviligne* de classe  $C^k$  sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  est la donnée de  $n$  fonctions  $y_1, y_2, \dots, y_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\phi : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

est un difféomorphisme de classe  $C^k$  de  $U$  vers un ouvert  $V = \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ .

Il est important de connaître et de comprendre cette définition.

b.) C'est peut-être contre-intuitif, mais il n'y a aucune raison que  $y_2 = x_2$  implique  $\frac{\partial}{\partial y_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}$ .

Rappelons la formule

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial y_2},$$

donc pour que  $\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial y_2}$ , il faut que  $y_2 = x_2$  et que  $y_1$  soit indépendant de  $x_2$  (i.e.  $\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 0$ ).

De là il est facile de construire un contre exemple (il n'y a même pas besoin de prendre des coordonnées curvilignes, on peut prendre des coordonnées linéaires). Par exemple si  $y_1 = ax_1 + bx_2$  et  $y_2 = x_2$ , alors  $\frac{\partial}{\partial x_2} = b \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}$ .

---

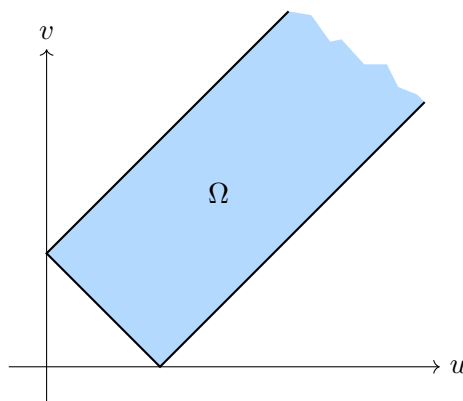
**Exercice 6.7.** Soient  $p = (p_1, p_2)$  et  $q = (q_1, q_2)$  deux points distincts de  $\mathbb{R}^2$ . Prouver que les fonctions  $u(x, y) = d((x, y), (p_1, p_2))$  et  $v(x, y) = d((x, y), (q_1, q_2))$  (où  $d(\cdot, \cdot)$  est la distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^2$ ) définissent un système de coordonnées curvilignes de classe  $C^\infty$  dans chacun des demi-plans limités par la droite passant par  $p$  et  $q$ . Décrire les lignes de coordonnées.

**Solution 6.7.** Les lignes de coordonnées sont les cercles concentriques centrés en  $p$  et en  $q$ .

Notons  $L$  la droite passant par  $p$  et  $q$  et  $H_1$  et  $H_2$  les deux demi-plans limités par  $L$ . L'application  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  est clairement une bijection de  $H_1$  (ou  $H_2$ ) vers l'ensemble

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + v > \delta, u > v - \delta, v > u - \delta\}$$

où  $\delta = d(p, q)$  car dans dans chaque demi-plan il y a un et un seul point à distance  $u$  de  $p$  et à distance  $v$  de  $q$ , à condition que  $u$  et  $v$  soient positifs et que les trois inégalités du triangles soient vérifiées (on peut facilement vérifier que ces trois inégalités impliquent que  $u > 0$  et  $v > 0$ ).



Les fonctions  $u$  et  $v$  sont données algébriquement par

$$u(x, y) = \sqrt{(x - p_1)^2 + (y - p_2)^2}, \quad v(x, y) = \sqrt{(x - q_1)^2 + (y - q_2)^2},$$

en particulier elles sont de classe  $C^\infty$  sur l'ensemble  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Pour prouver que  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  est un difféomorphisme de  $H_i$  vers  $\Omega$  il ne reste qu'à vérifier que le jacobien de cette application est partout non nul. Or nous avons

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x - p_1}{u(x, y)} & \frac{y - p_2}{u(x, y)} \\ \frac{x - q_1}{v(x, y)} & \frac{y - q_2}{v(x, y)} \end{pmatrix}$$

le jacobien est donc

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{u(x, y)v(x, y)} \det \begin{pmatrix} x - p_1 & x - q_1 \\ y - p_2 & y - q_2 \end{pmatrix}$$

Si  $(x, y)$  n'appartient pas à  $L$ , alors  $u(x, y)v(x, y) > 0$  et  $\det \begin{pmatrix} x - p_1 & x - q_1 \\ y - p_2 & y - q_2 \end{pmatrix} \neq 0$  car les trois points  $p, q$  et  $(x, y)$  ne sont pas alignés. On a montrés que le Jacobien ne s'annule pas sur le demi-plan  $H_i$  et donc  $(u, v)$  définit un système de coordoonées curvilignes.

## B. Exercices complémentaires

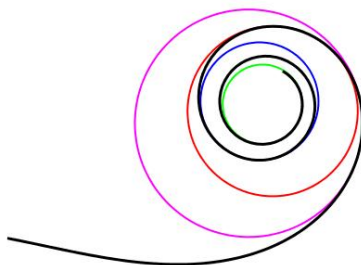
**Exercice 6.8.** (a) Rappeler à quelle condition on peut définir le cercle osculateur d'une courbe  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  en un point donné.

(b) Rappeler la définition du cercle osculateur.

(c) Comment trouve-t-on le centre et le rayon du cercle osculateur en un point donné de la courbe? Préciser dans quel plan ce cercle est contenu.

(d) Prouver le résultat suivant : *Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe plane  $C^3$  dont la courbure est positive et strictement croissante. Alors les cercles osculateurs  $\mathcal{C}(s)$  à  $\alpha$  sont emboîtés dans le sens suivant : Si  $s_1 < s_2$ , alors  $\mathcal{C}(s_2)$  est contenu dans le disque bordé par  $\mathcal{C}(s_1)$ .*

Indications pour la question (d): Montrer d'abord que le rayon  $\rho(s)$  de  $\mathcal{C}(s)$  est une fonction décroissante de  $s$ . Puis montrer que la distance entre le centre de  $\mathcal{C}(s_1)$  et  $\mathcal{C}(s_2)$  est inférieure à la différence des rayons (pourquoi cela répond-il à la question?). Pour justifier cette dernière affirmation il est utile de supposer la courbe  $\alpha$  paramétrée naturellement et de calculer la vitesse de  $s \mapsto c(s)$  (la dérivée du centre  $c(s)$  de  $\mathcal{C}(s)$  se calcule facilement dans le repère de Frenet).



**Solution 6.8.** a) Le cercle osculateur est défini pour tous les points biréguliers d'une courbe de classe  $C^2$ .

b) Le cercle osculateur à la courbe  $\alpha$  en  $t$  est contenu dans le plan osculateur et c'est l'unique cercle de ce plan qui est tangent à  $\alpha$  en  $t$  et qui a la même courbure que  $\alpha$  en  $t$ .

On peut aussi dire que le cercle osculateur est l'unique cercle qui a un contact d'ordre 2 avec  $\alpha$  en  $t$ .

c) Son rayon est  $\rho(t) = 1/|\kappa(t)|$  et son centre est le point  $c(t) = \alpha(t) + \rho(t)\mathbf{N}_\alpha(t)$ , où  $\mathbf{N}_\alpha(t)$  est le vecteur normal principal à  $\alpha$  en  $t$ . Ce cercle se paramétrise par

$$\theta \mapsto \alpha(t) + \rho(t) ((1 - \cos(\theta)) \mathbf{N}_\alpha(t) + \sin(\theta) \mathbf{T}_\alpha(t)).$$

d) On suppose que la courbe est paramétrée naturellement et on note  $s$  le paramètre. On remarque que si la courbure  $\kappa(s)$  est une fonction positive et monotone croissante, alors  $\rho(s) = 1/\kappa(s)$  est positive décroissante. Pour tout  $s$  on note  $c(s) = \alpha(s) + \rho(s)\mathbf{N}_\alpha(s)$  le centre du cercle osculateur, alors

$$\dot{c}(s) = \dot{\alpha} + \dot{\rho}(s)\mathbf{N}_\alpha(s) + \rho(s)\dot{\mathbf{N}}_\alpha(s) = \mathbf{T}(s) + \dot{\rho}(s)\mathbf{N} - \rho(s)\kappa(s)\mathbf{T} = \dot{\rho}(s)\mathbf{N}.$$

En particulier la vitesse de  $c(s)$  est

$$\|\dot{c}(s)\| = |\dot{\rho}(s)| = -\dot{\rho}(s).$$

Pour  $s_1 < s_2$ , on a alors

$$d(c(s_1), c(s_2)) \leq \int_{s_1}^{s_2} \|\dot{c}(\sigma)\| d\sigma = - \int_{s_1}^{s_2} \dot{\rho}(\sigma) d\sigma = \rho(s_1) - \rho(s_2).$$

Cela implique que le cercle de centre  $c(s_2)$  et rayon  $\rho(s_2)$  est emboîté dans le cercle de centre  $c(s_1)$  et rayon  $\rho(s_1)$ . En effet, si  $x$  est un point du second cercle alors

$$d(x, c(s_1)) \leq d(x, c(s_2)) + d(c(s_2), c(s_1)) = \rho(s_2) + (\rho(s_1) - \rho(s_2)) = \rho(s_1),$$

donc  $x$  appartient au disque de centre  $c(s_1)$  et rayon  $\rho(s_1)$ .

**Exercice 6.9.** (a) Soit  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe plane de classe  $C^3$  de longueur infinie dont la courbure est une fonction positive et strictement croissante. Prouver que la trace de cette courbe est bornée.

Pouvez vous donner une borne explicite (i.e. une constante  $C$  qui dépend du minimum de la courbure et telle que  $\|\gamma(s) - \gamma(0)\| \leq C$  pour tout  $s$  ?)

(b) Montrer par un exemple que l'hypothèse de monotonie de la courbure est nécessaire. Plus précisément, montrer qu'il existe une courbe dont la courbure vérifie  $k(s) \geq a > 0$  pour tout  $s$  et qui n'est pas bornée. (Il n'est pas nécessaire de produire une formule explicite, l'exemple peut simplement se dessiner).

Indication pour la question (a) : penser à l'exercice 6.7(d).

**Solution 6.9.** (a) D'après l'exercice 6.3(d), une telle courbe est entièrement contenue dans le cercle osculateur  $\mathcal{C}$  en  $\gamma(0)$ . Par conséquent la trace  $\gamma(\mathbb{R}_+)$  de la courbe est un sous-ensemble borné et son diamètre est plus petit ou égal au diamètre de  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire à  $2\rho_\gamma(0)$ .

(b) La courbe ci-dessous est de courbure minorée par une constante positive. Elle peut se prolonger à l'infini et elle n'est donc pas bornée.

Une expression analytique possible est  $\gamma(t) = (t - 2\sin(t), 2\cos(t))$ .



**Exercice 6.10.** Notons par  $\gamma(s) = (x(s), y(s)) \in \mathbb{R}^2$  la chlotoïde paramétrée naturellement. Pensez-vous que la limite

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$$

existe ?

(Il s'agit de proposer un argument géométrique et non de calculer ou analyser les limites des intégrales de Fresnel; la question 6.7(d) est utile pour cet exercice).

**Solution 6.10.** L'idée de l'argument est que la courbure de la chlotoïde est monotone croissante et tend vers  $\infty$ . La chlotoïde est une spirale et elle ne peut pas s'accumuler sur un cercle limite car le rayon du cercle osculateur tend vers 0. Donc  $\gamma(s)$  doit s'accumuler vers un point limite.

On peut supposer pour simplifier que l'équation intrinsèque de  $\gamma$  est  $k(s) = s$ . L'exercice 6.7 (d) implique alors que pour tout  $a > 0$ , on a

$$\text{diam}\{\gamma(s) \mid s \geq a\} \leq \frac{2}{a} \quad (= \text{diamètre du cercle osculateur à } \gamma \text{ en } \gamma(a)).$$

Cette inégalité est encore vraie avec l'adhérence :

$$\text{diam} \left( \overline{\{\gamma(s) \mid s \geq a\}} \right) \leq \frac{2}{a}.$$

On peut donc conclure avec le résultat suivant sur la topologie des espaces métriques (appelé le principe des sous-ensembles emboîtés de Cantor) :

*Si  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $(F_n)$  est une suite décroissante de sous-ensembles fermés non vides de  $X$  tels que  $F_{n+1} \subseteq F_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et telle que leur diamètre tend vers zéro, c'est-à-dire :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0,$$

*alors l'intersection de tous ces sous-ensembles contient exactement un point :*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$$

*pour un certain  $x_0$  dans  $X$ .*

**Remarque** En utilisant des techniques d'analyse complexe, on peut prouver que

$$\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{s^2}{2}\right) ds = \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{s^2}{2}\right) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ce qui démontre l'existence de la limite  $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(s)$  par un autre moyen.

Voir [https://fr.wikipedia.org/wiki/Int%C3%A9grale\\_de\\_Fresnel](https://fr.wikipedia.org/wiki/Int%C3%A9grale_de_Fresnel)