A. Exercices standards.

Exercice 4.1. Si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, on dit que le vecteur $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ est la *composante normale* de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ selon $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ si $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}$. Montrer que cette composante normal peut s'écrire

$$\mathbf{c} = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

Solution 4.1. Définissons le vecteur $\mathbf{c}$ par la formule $\mathbf{c} = \frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}$. Il est clair par les propriétés connues du produit vectoriel que $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, Il reste donc simplement à montrer que $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ est un multiple de $\mathbf{a}$.

Par la première identité de Grassmann on a

$$\mathbf{c} \; = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle \, \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2} - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \, \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} = \mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}$$

avec $\lambda = \dfrac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a}\|^2}$.

Exercice 4.2. Démontrer que le vecteur (unitaire) tangent et le vecteur de courbure d'une courbe régulière de classe C^2 sont des notions géométriques, i.e. ces champs de vecteurs sont invariants par reparamétrisation directe.

Solution 4.2. (a) Il est intuitivement évident que $\mathbf{T}_\alpha$ est une quantité géométrique puisque c'est vecteur unitaire indiquant la direction de la courbe. Voyons tout de même une preuve formelle : Soit $\alpha(t)$ $(t \in I)$ une paramétrage de α et $\beta(u)$ $(u \in J)$ un reparamétrage de α. Il existe alors une fonction $h : I \to J$ telle que $h'(t) > 0$ et $\alpha(t) = \beta(h(t))$. On a donc $u = h(t)$.
On sait que $V_\alpha(t) = V_\beta(u)h'(t)$, par conséquent

$$\mathbf{T}_\alpha(t) = \frac{1}{V_\alpha(t)} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{V_\alpha(t)} \frac{d\beta(h(t))}{dt} = \frac{h'(t)}{V_\alpha(t)} \frac{d\beta(u)}{du} = \frac{1}{V_\beta(u)} \frac{d\beta(u)}{du} = \mathbf{T}_\beta(u) = \mathbf{T}_\beta(h(t)).$$

(b) Montrons maintenant que le vecteur de courbure $\mathbf{K}_\alpha(t)$ est aussi une quantité géométrique : En utilisant les relations $V_\alpha(t) = V_\beta(u)h'(t)$ et $\mathbf{T}_\alpha(t) = \mathbf{T}_\beta(t)$ avec $u = h(t)$ on obtient

$$\mathbf{K}_\alpha(t) = \frac{1}{V_\alpha(t)} \frac{d}{dt}\mathbf{T}_\alpha(t) = \frac{1}{V_\beta(u)h'(t)} \frac{d}{dt}\mathbf{T}_\alpha(t) = \frac{1}{V_\beta(u)} \frac{d}{du}\mathbf{T}_\beta(u) = \mathbf{K}_\beta(u) = \mathbf{K}_\beta(h(t)).$$

Exercice 4.3. Nous avons défini le *vecteur normal principal* $\mathbf{N}_\alpha$ et le *vecteur de courbure* $\mathbf{K}_\alpha$ d'une courbe birégulière α de classe C^2 par

$$\mathbf{N}_\alpha = \frac{\ddot{\alpha} - \langle \ddot{\alpha}, \mathbf{T}_\alpha\rangle \mathbf{T}_\alpha}{\|\ddot{\alpha} - \langle \ddot{\alpha}, \mathbf{T}_\alpha\rangle \mathbf{T}_\alpha\|} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{K}_\alpha = \frac{1}{\|\dot{\alpha}\|}\dot{\mathbf{T}}_\alpha.$$

Prouver que $\mathbf{K}_\alpha = \kappa_\alpha \mathbf{N}_\alpha$, où $\kappa_\alpha = \|\mathbf{K}_\alpha\|$ est la courbure de α.

Solution 4.3. On part de la formule de l'accélération $\ddot{\alpha} = \dot{V}\mathbf{T} + V^2\mathbf{K}$. On a donc

$$\langle \ddot{\alpha}, \mathbf{T} \rangle = \dot{V}\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle + V^2\langle \mathbf{K}, \mathbf{T} \rangle = \dot{V},$$

car $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = 1$ et $\langle \mathbf{K}, \mathbf{T} \rangle = 0$. Par conséquent

$$\ddot{\alpha} - \langle \ddot{\alpha}, \mathbf{T} \rangle \mathbf{T} = \left(\dot{V}\mathbf{T} + V^2\mathbf{K} \right) - \dot{V}\mathbf{T} = V^2\mathbf{K}.$$

Ainsi $\|\ddot{\alpha} - \langle \ddot{\alpha}, \mathbf{T} \rangle \mathbf{T}\| = V^2\kappa$, et on a finalement

$$\mathbf{N} = \frac{\ddot{\alpha} - \langle \ddot{\alpha}, \mathbf{T} \rangle \mathbf{T}}{\|\ddot{\alpha} - \langle \ddot{\alpha}, \mathbf{T} \rangle \mathbf{T}\|} = \frac{\mathbf{K}}{\kappa}.$$

Exercice 4.4. Prouver que la courbe $\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$ est birégulière, puis calculer son vecteur de courbure et sa courbure (la courbure est la norme du vecteur de courbure).

Solution 4.4. La courbe γ est birégulière car les vecteurs

$$\dot{\gamma}(t) = (\sinh(t), \cosh(t), 1), \quad \text{et} \quad \ddot{\gamma}(t) = (\cosh(t), \sinh(t), 0),$$

sont linéairement indépendants pour tout t. La vitesse de γ est $V_\gamma(t) = \sqrt{2}\cosh(t)$ et le vecteur unitaire tangent est donc

$$\mathbf{T}_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{V_\gamma(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tanh(t), 1, \frac{1}{\cosh(t)} \right).$$

In rappelle que le vecteur de courbure est défini par

$$\mathbf{K}_\gamma(t) = \frac{1}{V_\gamma(t)} \dot{\mathbf{T}}_\gamma(t).$$

on a donc

$$\dot{\mathbf{T}}_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\cosh^2(t)}, 0, \frac{-\sinh(t)}{\cosh^2(t)} \right), \qquad \mathbf{K}_\gamma(t) = \frac{1}{V_\gamma(t)} \dot{\mathbf{T}}_\gamma(t) = \frac{1}{2\cosh^3(t)} \left(1, 0, -\sinh(t)\right),$$

et la courbure est

$$\kappa_\gamma(t) = \|\mathbf{K}_\gamma(t)\| = \frac{1}{2\cosh^2(t)}.$$

Exercice 4.5. Prouver la formule suivante qui donne la courbure d'une courbe régulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2 dans $\mathbb{R}^3$:

$$\kappa_\gamma(u) = \frac{\|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)\|}{V_\gamma^3}.$$

Solution 4.5. En utilisant $\dot{\gamma} = V_\gamma \cdot \mathbf{T}$ et la formule de l'accélération $\ddot{\gamma} = V_\gamma^2 \cdot \mathbf{K} + \dot{V}_\gamma \cdot \mathbf{T}$, on obtient

$$\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = (V_\gamma \cdot \mathbf{T}) \times (V_\gamma^2 \cdot \mathbf{K} + \dot{V}_\gamma \cdot \mathbf{T}) = V_\gamma^3 \cdot \mathbf{T} \times \mathbf{K}.$$

On sait en outre que $\mathbf{T} \perp \mathbf{K}$, donc

$$\|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)\| = V_\gamma^3 \cdot \|\mathbf{T} \times \mathbf{K}\| = V_\gamma^3 \|\mathbf{T}\| \|\mathbf{K}\| = V_\gamma^3 \cdot \kappa_\gamma(u).$$

Exercice 4.6. La *développée* d'une courbe birégulière $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est la courbe $\beta : I \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\beta(u) = \alpha(u) + \frac{1}{\kappa_\alpha(u)}\mathbf{N}_{\alpha_u}$$

où $\rho_\alpha(u) = \frac{1}{\kappa_\alpha(u)}$ est le *rayon de courbure* et $\mathbf{N}_{\alpha_u}$ est le vecteur normal principal. La développée d'une courbe est donc le lieu géométrique de ses centres de courbure (= centre du cercle osculateur).

Calculer les développées des courbes suivantes:

(a) Un cercle dans $\mathbb{R}^n$.

(b) Une droite dans $\mathbb{R}^n$.

(c) L'hélice circulaire droite $\alpha(u) = (a\cos(u), a\sin(u), b\,u)$ dans $\mathbb{R}^3$ (on suppose $a, b > 0$).

(d) La cycloïde $\gamma(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))$ dans $\mathbb{R}^2$.

Prouver que la développée de l'hélice est de nouveau une hélice et que la développée de la cycloïde est aussi une cycloïde.

Solution 4.6. (a) La développée d'un cercle dégénère en une courbe constante (c'est le centre du cercle).

(b) La développée de la droite n'est pas définie car cette courbe n'est pas birégulière (cette question était donc un piège, vous n'êtes bien sûr pas tombé dedans).

(c) l'hélice. Pour l'hélice $\alpha(u) = (a\cos(u), a\sin(u), bu)$ on a

$$\dot\alpha(u) = (-a\sin(u), a\cos(u), b) \quad \text{et} \quad \ddot\alpha(u) = -a(\cos(u), \sin(u), 0)$$

Ces vecteurs sont linéairement indépendants et l'hélice est donc birégulière. Notons $c = V_\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$ pour la vitesse de α (qui est constante). On a alors

$$\mathbf{T}(\alpha, u) = \frac{1}{c}(-a\sin(u), a\cos(u), b), \qquad \mathbf{K}(\alpha, u) = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{T}}(\alpha, u) = -\frac{a}{c^2}(\cos(u), \sin(u), 0).$$

La courbure est donc $\kappa(\alpha, u) = \|\mathbf{K}(\alpha, u)\| = \frac{a}{c^2}$.

Le vecteur normal principal est $\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\mathbf{K} = -(\cos(u), \sin(u), 0)$, et on trouve après quelque calculs que la développée de l'hélice est

$$\beta(u) = \alpha(u) + \frac{1}{\kappa(\alpha, u)}\mathbf{N} = \left(-\frac{b^2}{a}\cos(u), -\frac{b^2}{a}\sin(u), bu\right).$$

Il s'agit clairement d'une nouvelle hélice (de même axe que α).

(d) La cycloïde Pour la cycloïde $\gamma(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))$, on a $\dot\gamma(t) = (r(1 - \cos t), r\sin t)$ et $\ddot\gamma(t) = (r\sin t, r\cos t)$. La vitesse est $V_\gamma(t) = r\sqrt{2(1 - \cos t)}$ et son vecteur tangent

$$\mathbf{T}(\gamma, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 - \cos t}, \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \cos t}}\right)$$

Dans l'intervalle $[0, \pi]$, la fonction $\sin t$ est positive, on simplifie la deuxième coordonnée en utilisant la formule $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$$\frac{\sin t}{\sqrt{1 - \cos t}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\sqrt{1 - \cos t}} = \frac{\sqrt{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}}{\sqrt{1 - \cos t}} = \sqrt{1 + \cos t}$$

Donc

$$\mathbf{T}(\gamma,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-\cos t},\sqrt{1+\cos t}\right)$$

Nous avons besoin du vecteur courbure et de la courbure pour calculer le centre du cercle osculateur. La courbure est définie par

$$\mathbf{K}(\gamma,t)=\frac{1}{V_\gamma(t)}\frac{d}{dt}\mathbf{T}(\gamma,t)$$

On calcule donc

$$\frac{d}{dt}\mathbf{T}(\gamma,t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos t}},\frac{-\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}\right)$$

On obtient un vecteur courbure

$$\mathbf{K}(\gamma,t)=\frac{1}{4r(1-\cos t)}\left(\sin t,\cos t-1\right)$$

où l'on a substitué $\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}$ dans la deuxième composante. Ainsi la courbure est déterminée par

$$\kappa^2(\gamma,t)=\|\mathbf{K}(\gamma,t)\|^2=\frac{1}{8r^2(1-\cos t)}$$

Finalement la développée est

$$\tilde{\gamma}(t)=\gamma(t)+\frac{1}{\kappa^2(\gamma,t)}\cdot\mathbf{K}(\gamma,t)=(r(t+\sin t),r(\cos t-1))$$

Qui est une nouvelle cycloïde (translatée).

Exercice 4.7. Sans faire aucun calcul, dessiner (approximativement) une ellipse et sa développée. Expliquer votre raisonnement.

Solution 4.7. Par symétrie, on peut se restreindre à décrire la développée d'un quart d'ellipse. A l'intersection de l'ellipse avec ses axes se trouvent les points de courbures minimales et maximales. Ces points sont des points de rebroussement de la développée.

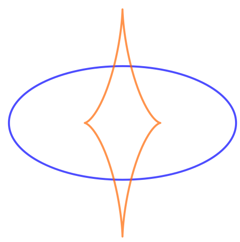
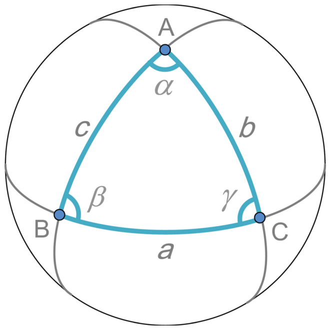


Figure 1: Ellipse et sa développée

On appelle *triangle sphérique* la donnée de trois points A, B, C sur une sphère S, avec les arcs de grand-cercles a (reliant B et C), b (qui relie A et C) et c (qui relie A et B). Ces arcs de grand-cercles sont les *côtés* du triangle sphérique. On note α l'angle formé par les arcs b et c au point A, de même on note β l'angle en B et γ l'angle en C.



Rappelons qu'on appelle *grand-cercle* sur une sphère, un cercle formé par l'intersection de cette sphère avec un plan passant par le centre de la sphère. Les autres cercles tracés sur la sphère sont les *petit-cercles*. Deux points sur une sphère sont toujours reliés par deux arcs de grand-cercles; dans la détermination d'un triangle sphérique, on ne considère que le plus petit de ces deux arcs.

Exercice 4.8. Par abus de notations, nous notons aussi par a, b, et c les longueurs des côtés du triangle sphérique. Démontrer la formule de trigonométrie sphérique suivante:

$$\cos\left(\frac{c}{r}\right) = \cos\left(\frac{a}{r}\right)\cos\left(\frac{b}{r}\right) + \sin\left(\frac{a}{r}\right)\sin\left(\frac{b}{r}\right)\cos(\gamma),$$

où r est le rayon de la sphère.

Solution 4.8. Nous présentons deux solutions de cet exercice. La première méthode utilise le produit vectoriel et en particulier *l'identité de Lagrange*, qui dit que pour quatre vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ on a $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ (voir exercice 2.1)

On suppose d'abord que la sphère est centrée en l'origine de $\mathbb{R}^3$ et de rayon $r = 1$. Les points A, B et C sont alors des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$. L'angle γ entre les côtés a et b du triangle sphérique est aussi l'angle entre les plans OAC et OBC (voir la figure). Mais l'angle entre deux plans de $\mathbb{R}^3$ est aussi l'angle entre les vecteurs normaux à ces plans, par conséquent on a

$$\gamma = \text{l'angle entre } C \times A \text{ et } C \times B.$$

Donc

$$\cos(\gamma) = \frac{\langle C \times A, C \times B \rangle}{\|C \times A\| \|C \times B\|}.$$

On utilise maintenant l'identité de Lagrange, qui entraîne que

$$\langle C \times A, C \times B \rangle = \langle C, C \rangle \langle A, B \rangle - \langle C, B \rangle \langle C, A \rangle = \cos(c) - \cos(a)\cos(b),$$

et d'autre part on a $\|C \times A\| = \sin(b)$ et $\|C \times A\| = \sin(a)$. Nous concluons donc que

$$\cos(\gamma) = \frac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\sin(b)\sin(a)}$$

qui est l'égalité voulue dans le cas où $r = 1$. Dans le cas général, il suffit de faire une homothétie de la sphère de rapport $1/r$.

Autre solution On peut aussi raisonner de la façon suivante. On suppose toujours que $r = 1$ et on note U le vecteur unitaire dans le plan OAC, orthogonal à C et tel que

$$A = \cos(b)C + \sin(b)U.$$

On note aussi V le vecteur unitaire dans le plan OBC, orthogonal à C et tel que

$$B = \cos(a)C + \sin(a)V.$$

Alors γ est l'angle entre U et V et on a donc $\cos(\gamma) = \langle U, V\rangle$. En utilisant que $\langle C, U\rangle = \langle C, V\rangle = 0$, on a alors

$$\begin{aligned}\cos(c) &= \langle A, B\rangle \\ &= \langle(\cos(b)C + \sin(b)U), (\cos(a)C + \sin(a)V)\rangle \\ &= \cos(b)\cos(a)\langle C, C\rangle + \sin(b)\sin(a)\langle U, V\rangle \\ &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\gamma)\end{aligned}$$

Exercice 4.9. La distance sphérique $d_S(A, B)$ entre deux points A et B sur une sphère S est par définition la longueur de l'arc de grand cercle reliant ces deux points.

Montrer à partir de la trigonométrie sphérique que d_S vérifie bien toutes les propriétés d'une distance.

Solution 4.9. La seule condition non banale à vérifier est l'inégalité du triangle

$$d_S(A, B) \leq d_S(A, C) + d_S(C, B).$$

Avec les notation de l'exercice 1.8, on doit montrer que $c \leq a + b$. On suppose pour simplifier que S est une sphère de rayon 1, alors on a $a \in [0, \pi]$, donc $\sin(a) \geq 0$. De même $\sin(b) \geq 0$; par conséquent

$$\begin{aligned}\cos(c) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\gamma) \\ &\geq \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ &= \cos(a + b).\end{aligned}$$

Mais le cosinus est une fonction décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$, donc le calcul précédent nous dit que $c \leq a + b$.

Remarque. Le raisonnement montre aussi que l'inégalité du triangle est une égalité si et seulement si $\cos(\gamma) = -1$, c'est-à-dire lorsque $\gamma = \pi$. C'est le cas lorsque le point C est situé sur l'arc de grand cercle reliant A à B (et donc le triangle sphérique est dégénéré en un segment).

B. Exercice complémentaire (ne fera pas partie du champ de l'examen).

Exercice 4.10. Le but de cet exercice est de montrer qu'on peut (re)définir la longueur d'une courbe de classe C^1 par un processus d'"approximations polygonales".

Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1, et soit $\sigma = [t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b]$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. On note

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{m-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

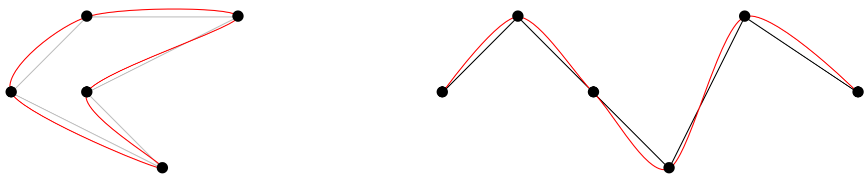
où le suprémum est pris sur toutes les subdivisions de $[a, b]$ et $d(p, q) = \|q - p\|$.

(a) Faire un dessin et expliquer brièvement la signification de cette formule.

(b) Montrer que pour tout courbe C^1 on a $L(\gamma) \leq \ell(\gamma)$, où $\ell(\gamma)$ est la longueur de γ telle que définie dans le cours.

(c) Prouver l'inégalité inverse $\ell(\gamma) \leq L(\gamma)$.
(Indication : Utiliser que $\dot{\gamma}$ est uniformément continue et montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une subdivision suffisamment fine de $[a, b]$ telle que $\ell(\gamma) \leq \sum_{i=1}^{m-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + 2\varepsilon(b - a)$).

Solution 4.10. (a) L'idée de cette formule est de (re)définir la longueur d'une courbe par approximation polygonale. On admet que la longueur d'une courbe polygonale est la somme des distances de ces sommets et on approxime une courbe qulconque par une courbe polygonale.



(b) On a vu au cours que la longueur d'une courbe C^1 reliant deux points de $\mathbb{R}^n$ est plus grande ou égale à la distance euclidienne entre ces deux points. En particulier on a pour tous $a \leq t_0 < t_1 \leq b$:

$$d(\gamma(t'), \gamma(t'')) \leq \int_{t'}^{t''} V_\gamma(t) dt$$

Donc si $\sigma = [t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b]$ est une une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\sum_{i=0}^{m-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} V_\gamma(t) dt = \int_a^b V_\gamma(t) dt = \ell(\gamma).$$

En prenant le suprémum sur l'ensemble des subdivisions, on obtient $L(\gamma) \leq \ell(\gamma)$.

$$d(\gamma(t'), \gamma(t'')) \leq \int_{t'}^{t''} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Donc si $\sigma = [t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b]$ est une une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\sum_{i=0}^{m-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \ell(\gamma).$$

En prenant le suprémum on a $L(\gamma) \leq \ell(\gamma)$.
(c) Comme $\dot{\gamma}$ est supposée uniformément continue sur $[a, b]$, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\|\dot{\gamma}(s) - \dot{\gamma}(t)\| < \varepsilon$ si $|s - t| < \delta$. En particulier, si $\sigma = [t_0, ..., t_n]$ une subdivision de $[a, b]$ vérifiant $\Delta t_i = (t_{i+1} - t_i) < \delta$ pour tout i, alors on a $\|\dot{\gamma}(t)\| \leq \|\dot{\gamma}(t_i)\| + \epsilon$ pour tout $t_{i-1} < t \leq t_i$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}t \leq \|\dot{\gamma}(t_i)\| \Delta t_i + \varepsilon \Delta t_i \\
&= \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\gamma}(t_i) \,\mathrm{d}t \right\| + \varepsilon \cdot \Delta t_i \\
&= \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\gamma}(t) \,\mathrm{d}t + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\dot{\gamma}(t_i) - \dot{\gamma}(t)) \,\mathrm{d}t \right\| + \varepsilon \cdot \Delta t_i \\
&\leq \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\gamma}(t) \,\mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\dot{\gamma}(t_i) - \dot{\gamma}(t)) \,\mathrm{d}t \right\| + \varepsilon \cdot \Delta t_i \\
&\leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + 2 \cdot \varepsilon \cdot \Delta t_i
\end{aligned}$$

En additionnant ces inégalités, on obtient pour tout $\varepsilon > 0$

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + 2\cdot\varepsilon\Delta t_i \leq L(\gamma) + 2\varepsilon(b-a),$$

et donc $\ell(\gamma) \leq L(\gamma)$.

Remarque générale sur la longueur des courbes.

Les exercices précédents montrent que si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est une courbe de classe C^1, alors $L(\gamma) = \ell(\gamma)$, c'est-à-dire

$$\sup_\sigma \sum_{i=0}^{m} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt.$$

Il est clair que cette formule est encore vraie pour une courbe de classe C^1 par morceaux. Henri Lebesgue s'était posé la question suivante dans sa thèse dont le titre est *Intégrale, Longueur, Aire* (soutenue en 1902) : *Pour quelle classe de courbes*

$$\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \qquad (a \leq t \leq b)$$

la plus générale possible, a-t-on $L(\gamma) < \infty$ *et* $L(\gamma) = \ell(\gamma)$ *?*

Et il a formulé les réponses suivantes :

(i) La courbe γ est rectifiable (i.e. $L(\gamma) < \infty$) si et seulement si toutes les fonctions $t \mapsto x_i(t)$ sont à variation bornée.

(ii) On a l'égalité $\ell(\gamma) = L(\gamma) < \infty$ si et seulement si toutes les fonctions $t \mapsto x_i(t)$ sont absolument continues.

Les notions de fonctions *à variation bornée* et *absolument continues* sont définies dans les bons livres d'analyse réelle (par exemple l'excellent livre de Kolmogorov-Fomin). Faisons juste les remarques suivantes :

(a) Toute fonction à variation bornée admet une dérivée presque partout.

(b) Toute fonction absolument continue est à variation bornée.

(c) Inversement il existe des fonctions à variation bornée qui ne sont pas absolument continues.

(d) Toute fonction lipschitzienne est absolument continue.

Soulignons pour finir qu'il existe des courbes rectifiables pour lesquelles $\ell(\gamma) < L(\gamma)$. Un exemple est donné par le graphe de la fonction de Cantor-Vitalli (parfois appelé *escalier du diable*).

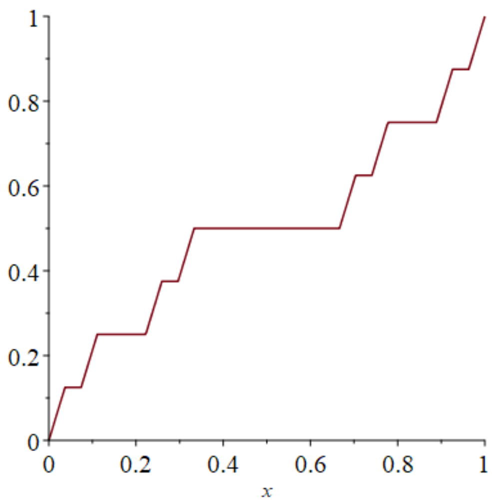


Figure 2: Une approximation de la fonction de Cantor-Vitalli