EPFL - Automne 2024	M. Troyanov
MATH 213: Géométrie Différentielle	**Solution Exercices**
Série 3	27.09.2024

Dans cette série on on avance avec la théorie des courbes (abscisse curviligne, paramétrage naturel). Enfin on approfondit quelques points subtils liés à la notion de longueur.

Exercice 3.1. Exprimer la longueur de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sous forme d'une intégrale (ne pas essayer de calculer cette intégrale, qui ressort de la théorie des *fonctions elliptiques*).

Solution 3.1. L'ellipse se paramétrise simplement par $(x(t),y(t))=(a\cos(t),b\sin(t))$. En supposant $0<b\leq a$, sa longueur est

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin(t)^2+b^2\cos(t)^2}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-k^2\cos(t)^2}dt$$

où $k=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$. Cette intégrale s'appelle une *intégrale elliptique de deuxième espèce* (et k est le *module*).

Remarquer qu'on peut également paramétrer la demi-ellipse comme un graphe $y=f(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. On peut donc aussi calculer la longueur de la demi-ellipse par l'intégrale suivante :

$$\frac{1}{2}L=\int_{x=-a}^{a}\sqrt{1+f'(x)^2}dx=\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a^2-k^2x^2}{a^2-x^2}}dx$$

En posant $a=1$, on obtient ainsi l'égalité :

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-k^2\cos(t)}dt=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}dx,$$

valable pour tout $k\in[0,1]$. Ce sont les deux écritures habituelles pour les intégrales elliptiques de deuxième espèce.

Exercice 3.2. (a) Calculer l'abscisse curviligne de la courbe

$$\gamma(t)=(\cosh(t),\sinh(t),t),$$

depuis le points initial $t_0=0$.

(b) Trouver ensuite le paramétrage naturel avec le même point initial.

Solution 3.2. (a) Le vecteur vitesse de γ est $\dot{\gamma}(t)=(\sinh(t),\cosh(t),1)$. La vitesse est donc

$$V_\gamma(t)=\sqrt{1+\sinh^2(t)+\cosh^2(t)}=\sqrt{2}\cosh(t).$$

L'abscisse curviligne depuis le points initial $t_0=0$ est donc

$$s(t)=\int_0^t V_\gamma(u)du=\sqrt{2}\int_0^t\cosh(u)du=\sqrt{2}\sinh(t)=\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{2}}.$$

(b) Pour trouver le paramétrage naturel on commence par calculer t en fonction de s :

$$t=\operatorname{arsinh}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)=\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+\sqrt{1+\frac{s^2}{2}}\right).$$

puis on exprime les coordoonées x, y, z en fonction de s :

$$x = \cosh(t) = \sqrt{1+\sinh^2(t)} = \sqrt{1+\frac{s^2}{2}}, \qquad y = \sinh(t) = \frac{s}{\sqrt{2}}, \qquad z = t = \log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{1+\frac{s^2}{2}}\right).$$

Ce qui nous donne

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\sqrt{1+\frac{s^2}{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, \log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{1+\frac{s^2}{2}}\right)\right).$$

Exercice 3.3. L'astroïde est la courbe plane d'équation

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 1.$$

(a) Dessiner l'astroïde.

(b) Trouver une paramétrisation de l'astroïde

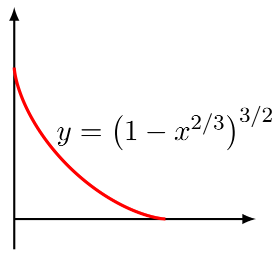
(c) Calculer la longueur d'un cycle de l'astroïde.

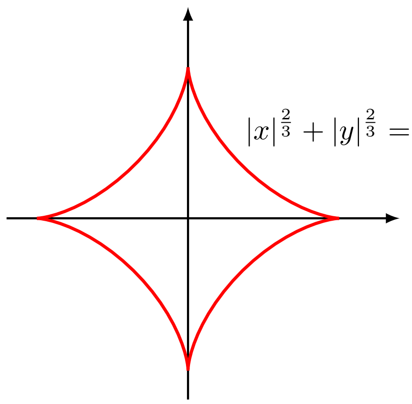
(d) Chercher tous les points singuliers.

(e) Calculer l'abscisse curviligne avec avec point initial en $(1, 0)$.

(f) Trouver le paramétrage naturel avec le même point initial.

Solution 3.3. (a) Observer que l'arc de l'astroïde contenu dans le cadran $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$ est le graphe de la fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par $y = f(x) = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}$. Ce graphe se représente sans difficulté. Les autres arcs de l'astroïdes s'obtiennent par symétries à travers les axes de coordonnées.





(b) En posant $\xi = \sqrt[3]{x}$ et $\eta = \sqrt[3]{y}$, l'équation devient $\xi^2 + \eta^2 = 1$, qui est le cercle unité, que l'on peut paramétriser par $\xi = \cos(u)$, $\eta = \sin(u)$. L'astroïde admet donc la forme paramétrique suivante :

$$\alpha(u) = (\cos^3(u), \sin^3(u)), \qquad (0 \leq u \leq 2\pi).$$

(c) Nous considérons la vitesse

$$V_\alpha(u) = ||\dot{\alpha}(u)|| = 3|\cos u \sin u| = \frac{3}{2}|\sin 2u|,$$

et nous calculons la longueur d'un cycle de l'astroïde :

$$L = \int_0^{2\pi} V_\alpha(u)du = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\sin 2u|\, du = \frac{3}{2}\int_0^{4\pi} |\sin t|\, \frac{dt}{2} \ .$$

Or $|\sin t|$ est périodique de période π et $\sin t = |\sin t|$ pour $t \in [0, \pi]$, d'où

$$\int_0^{4\pi} |\sin t|\, dt = 4\int_0^{\pi} \sin t\, dt = 8 \ .$$

Au total,

$$L = \frac{3}{4}\int_0^{4\pi} |\sin t|\, dt = 6 \ .$$

(d) Les singularités de α sont les points où $V_\alpha(u) = 0$. Ils se situent en $u = k\frac{\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi les points singuliers sont $\{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$.

(e) Nous nous contentons de trouver l'abscisse curviligne entre deux singularités (en l'occurrence 0 et $\frac{\pi}{2}$ car le point initial est $\alpha(0)$). Soit $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Alors,

$$s(u) = \int_0^u ||\dot{\alpha}(t)||\, dt = \frac{3}{2}\int_0^u |\sin 2\tau|\, d\tau = \frac{3}{2}\int_0^u \sin 2\tau\, d\tau = \frac{3}{4}(1 - \cos 2u) = \frac{3}{2}\sin^2(u)$$

car $|\sin 2\tau| = \sin 2\tau$ pour $0 \le \tau \le \frac{\pi}{2}$.

(f) Pour trouver la paramétrisation naturelle, on observe que la relation $s(u) = \frac{3}{2}\sin^2(u)$ est équivalente à $\sin^3(u) = \left(\frac{2}{3}s\right)^{3/2}$. On a donc $\cos^3(u) = \left(1 - \frac{2}{3}s\right)^{3/2}$ et donc

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(u(s)) = (\cos^3(u), \sin^3(u)), = \left(\left(1 - \frac{2}{3}s\right)^{3/2}, \left(\frac{2}{3}s\right)^{3/2}\right) \ .$$

Remarque. On peut définir l'abscisse curviligne pour toute l'astroïde, elle sera définie par morceaux et périodiquement; mais par contre, il n'existe pas de paramétrage naturel C^1 global de l'astroïde en raison des singularités.

Exercice 3.4. (a) Notons (x, y) les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^2$. Rappeler la définition précise des *cordonnées polaires* (r, θ), en précisant leur domaine de définition.

(b) Écrire l'équation générale d'une droite en cordonnées polaires, puis l'équation d'un cercle de rayon a et de centre $c = (r_0, \theta_0)$.

(c) Soit $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$ une courbe de classe C^1 écrite en coordonnées polaires. Trouver et prouver une formule donnant sa longueur dans ces coordonnées.

(d) La *spirale logarithmique* est la courbe plane d'équation polaire $r = e^\theta$. Utiliser la formule précédente pour calculer la longueur d'un cycle de cette spirale défini par $0 \le \theta \le 2\pi$. Donner ensuite le paramétrage naturel avec le point $(1, 0)$ comme point initial.

Solution 3.4. (a) Précisons d'abord qu'un *système de coordonnées* (de classe C^k) dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est la donnée de n fonctions $y_1, \dots, y_n : U \to \mathbb{R}$ telles que l'application $F : U \to \mathbb{R}^n$ définie par $F(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ est un difféomorphisme de classe C^k de U vers $F(U)$. De façon équivalente, il suffit que F soit injective, que les fonctions $y_j : U \to \mathbb{R}$ soient de classe C^k et que le jacobien ne s'annule pas:

$$J_F(x) = \det(DF_x) = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x)\right) \neq 0, \quad \forall x \in U.$$

Le *système de coordonnées polaires* dans le plan $\mathbb{R}^2$ correspond aux fonctions $r = r(x, y)$, $\theta = \theta(x, y)$, de classe C^∞, définies sur le domaine

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-\infty, 0],\ y = 0\}\}$$

à valeurs dans $(0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ définies par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

C'est un difféomorphisme dont l'inverse est donné par

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta).$$

Remarques. • Il est fréquent de définir la fonction $\theta(x, y)$ par la formule $\theta = \arctan(y/x)$. Cette formule est correcte, mais elle nous impose de ne définir les coordonnées polaires que dans le demi-plan $U' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ et dans ce cas l'angle est restreint à l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.
• Une autre approche, peut-être la plus élégante, consiste a considérer la variable θ modulo 2π, i.e. comme élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Les coordonnées polaires définissent alors un difféomorphisme entre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et le cylindre $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times (0, \infty)$.

(b) L'équation générale d'une droite s'écrit alors en coordonnées polaires:

$$ax + by + c = ar\cos(\theta) + br\sin(\theta) + c = 0.$$

Noter que par exemple une droite verticale est d'équation $r\cos(\theta) + c = 0$ et une droite horizontale admet l'équation $r\sin(\theta) + c = 0$.
L'équation cartésienne générale d'un cercle est du type $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, soumis à la condition $a^2 + b^2 \geq 4c$ (réfléchir pourquoi). Cela donne en cordonnées polaires :

$$r^2 + ar\cos(\theta) + br\sin(\theta) + c = 0.$$

(c) Si une courbe paramétrée est données en coordonnées polaires par $\alpha : t \to (r(t), \theta(t)))$, alors sa vitesse est

$$V_\alpha(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{dt}(r(t)\cos(\theta(t)))\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(r(t)\sin(\theta(t)))\right)^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

La longueur d'un arc de la courbe α est donc en corrodonnées polaire par

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2} dt.$$

Remarque Une courbe en coordonnées polaires est souvent données par une relation du type $r = f(\theta)$. Dans ce cas on peut utiliser θ comme paramètre, on a donc $\dot{\theta} = 1$ et la longueur s'écrit $\ell = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta$.
(d) Pour la spirale logarithmique $r = e^\theta$, on a $\frac{dr}{d\theta} = r = e^\theta$, donc la longueur cherchée est

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2\theta}} dt = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - 1\right).$$

Pour trouver la paramétrisation naturelle depuis le point initial $(1,0)$ (qui correspond à $\theta_0 = 0$, on calcule d'abord l'abscisse curviligne

$$s(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta = \sqrt{2}\left(e^\theta - 1\right).$$

Puis on inverse cette relation pour exprimer θ en fonction de s:

$$\theta(s) = \log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

Finalement on a la paramétrisation naturelle (en coordonnées polaires)

$$\tilde{\alpha}(s) = (r(s), \theta(s)) = \left(\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right), \log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right).\right).$$

En coordonnées cartésiennes, on a

$$(x(s), y(s)) = \left((1 + \frac{s}{\sqrt{2}}) \cdot \cos(\log(1 + \frac{s}{\sqrt{2}})), (1 + \frac{s}{\sqrt{2}}) \cdot \sin(\log(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}))\right).$$

On peut vérifier directement que dans cette paramétrisation on a $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$.

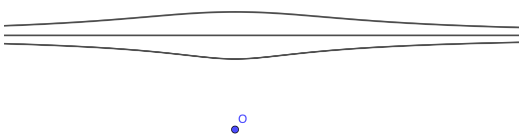
Exercice 3.5. La *conchoïde de Nicomède* est la courbe $\mathcal{C}$ dans le plan euclidien qui est définie de la façon suivante:
On considère un point O dans le plan et une droite D qui ne passe pas par O. Pour tout point p du plan tel que $p \notin D$ et $p \neq O$ on note $f(p) = d(p,q)$ où q est l'intersection de D avec la droite passant par O et p (i.e. $q = (O + \mathbb{R}\overrightarrow{Op}) \cap D$) :

$$\mathcal{C} = \{p \in \mathbb{E}^2 \mid f(p) = b\}.$$

(a) Dessiner la courbe $\mathcal{C}$. Est-elle connexe ?

(b) Donner une équation polaire de cette courbe (on supposera que la droite D est verticale et que le point O est l'origine).

Solution 3.5. Cette courbe possède deux composantes connexes (à condition de rajouter le point O lorsque $b \geq \text{dist}(O, D)$).



En coordonnées polaires, l'équation de la droite D (supposée verticale) est $r\cos(\theta) = a$. Si q est un point sur cette droite (d'angle polaire θ) et $p, q, 0$ sont alignés, alors p est également d'angle polaire θ et la distance de p à q est $|r(p) - r(q)| = |r(p) - \frac{a}{\cos(\theta)}|$. L'équation cherchée est donc

$$r = \frac{a}{\cos(\theta)} \pm b$$

On peut voir une animation sur `https://fr.wikipedia.org/wiki/Nicom%C3%A8de_(math%C3%A9maticien)`

Exercice 3.6. Soit $F : I \to SO(n) \subset M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n\times n}$ une courbe de classe C^1 à valeurs dans le groupe orthogonal. Prouver que $F(t)^{-1}\dot{F}(t)$ et $\dot{F}(t)F(t)^{-1}$ sont des matrices antisymétriques pour tout $t \in I$.

Solution 3.6. En dérivant $F \cdot F^\top = \mathrm{I}_n$ (la matrice identité), on trouve $\dot{F} \cdot F^\top + F \cdot (\dot{F})^\top = 0$. On a donc en tenant compte du fait que $F^{-1} = F^\top$:

$$\dot{F} \cdot F^{-1} = \dot{F} \cdot F^\top = -(F \cdot \dot{F}^\top) = -(\dot{F} \cdot F^\top)^\top = -(\dot{F} \cdot F^{-1})^\top$$

Ce qui signifie que $\dot{F} \cdot F^{-1}$ est antisymétrique. Le raisonnement est semblable pour $F^{-1} \cdot \dot{F}$-

Autre méthode : On dérive la relation $F^{-1} = F^\top$. Cela donne $F^{-1}\dot{F}F^{-1} = -\dot{F}^\top$, et donc

$$F^{-1}\dot{F} = -\dot{F}^\top F = -\left(F^\top \dot{F}\right) = -\left(F^{-1}\dot{F}\right).$$

Remarque. Ce résultat est important en cinématique du solide. On appelle parfois ces matrices le mouvement instantané mobile *et le* mouvement instantané fixe*, respectivement de F. Les concepts d'*axe instantané de rotation *et de* vitesse instantanée de rotation *d'un corps solide en mouvement se lisent facilement sur ces matrices.*
Plus généralement, si $F(t)$ est une courbe C^1 à valeurs dans un sous-groupe fermé G de $GL_n(\mathbb{R})$, alors $F(t)^{-1}\dot{F}(t)$ et $\dot{F}(t)F(t)^{-1}$ sont à valeurs dans l'algèbre de Lie de G.

Exercice 3.7. On rappelle que l'exponentielle $\exp(A)$ d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ est définie par la série :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots$$

On admet que cette série converge. On admet aussi que si $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ (la preuve est la même que pour le cas de l'exponentielle d'une somme de deux nombres réels).

(a) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique, alors $\exp(A) \in SO(n)$.

(b) Calculer la matrice $\exp(tJ)$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution 3.7. **(a)** Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si $A^\top = -A$. On a donc

$$I_n = \exp(0_n) = \exp(A - A) = \exp(A)\exp(-A) = \exp(A)\exp(A^\top).$$

Mais il est facile de vérifier que $\exp(A^\top) = \exp(A)^\top$. On a donc montré que $\exp(A) \cdot \exp(A)^\top = I_n$, par conséquent $\exp(A) \in O(n)$.

Pour montrer que $\exp(A) \in SO(n)$, il suffit donc de montrer que $\det(\exp(A)) > 0$. Or le raisonnement précédent montre en fait que $\exp(tA) \in O(n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc en particulier $\det(\exp(tA)) = \pm 1$. pour tout $t \in \mathbb{R}$. Mais la fonction $t \mapsto \det(\exp(tA)$ est continue et vaut $+1$ lorsque $t = 0$. Donc $\det(\exp(tA)) = 1$ pour tout t.

Autre argument : Un résultat du cours d'algèbre linéaire dit que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ on a

$$\det(\exp(A)) = \exp\left(\mathrm{Trace}(A)\right), \tag{*}$$

donc $\det(\exp(A)) > 0$. En fait, de façon plus précise, puisque A est antisymétrique, on a $\mathrm{Trace}(A) = 0$ et donc $\det(\exp(A)) = e^0 = +1$.

Rappelons comment on montre l'identité (*). La matrice A peut être vue comme un élément de $M_n(\mathbb{C})$. Supposons d'abord que A possède n valeur propres complexes deux-à-deux distinctes $\lambda_1, ...\lambda_n \in \mathbb{C}$, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad \mathrm{Tr(A)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Soit v_i un vecteur propre de A avec valeur propre λ_i, alors $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres pour A (en particulier A est diagonalisable). En utilisant que $A^k v_i = \lambda_i^k v_i$ on voit que

$$e^A v_i = \left(\mathrm{Id}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) v_i = v_i + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_i^k v_i = e^{\lambda_i} v_i,$$

ce qui montre que v_i est aussi un vecteur propre de e^A, avec valeur propre e^{λ_i}. On a donc

$$\det(\exp(A)) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i} = \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

On a ainsi démontré la formule (*) dans le cas particulier des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ qui ont n valeurs propres complexes deux-à-deux distinctes. Or cet ensemble est dense dans l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$, on peut donc conclure par un argument de continuité que l'identité (*) est vérifiée pour toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ (et en fait toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$).
Un autre argument possible se base sur les formes normales de Jordan.

(b) On voit facilement que

$$J^2 = -I = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J^3 = -J, \quad \text{et} \quad J^4 = I.$$

Ensuite les puissances de J se répètent modulo 4. On a donc

$$\begin{aligned}
\exp(tJ) &= J^0 + tJ + \frac{t^2}{2!} J^2 + \frac{t^3}{3!} J^3 + \frac{t^4}{4!} J^4 + \cdots \\
&= I + tJ - \frac{t^2}{2!} I - \frac{t^3}{3!} J + \frac{t^4}{4!} I + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots \right) \cdot I + \left(x - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots \right) \cdot J \\
&= \cos(t) I + \sin(t) J \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

qui n'est autre que la matrice de rotation R_t.

Remarque : Le même argument prouve la formule d'Euler :

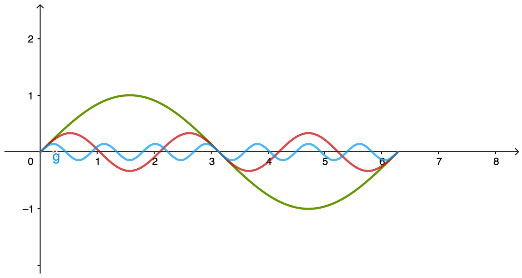
$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t).$$

Exercice 3.8. Prouver l'affirmation suivante ou trouver un contre-exemple : *Si $\gamma_n : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est une suite de courbes convergeant uniformément vers la courbe $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (supposée de classe C^1), alors les longueurs convergent, i.e. $\ell(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \ell(\gamma_n)$.*

Solution 3.8. L'affirmation est fausse, une suite de courbes peut converger uniformément vers une courbes C^1 en formant de rapides oscillations, qui peuvent entraîner une non-convergence de la longueur. Par exemple la suite de courbes $\gamma_n(x) = (x, \frac{1}{n}\sin(nx))$ sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$ converge uniformément vers le segment de droite reliant $(0,0)$ à $(0,2\pi)$. Pourtant la longueur de γ_n ne converge pas vers 2π, car

$$\ell(\gamma_n) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos(nx)^2}dx = \frac{1}{n}\int_0^{n2\pi} \sqrt{1+\cos(t)^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos(t)^2}dt = \ell(\gamma_1) \cong 7.64 > 2\pi,$$

qui est indépendante de n (on a posé $t = nx$).



Exercice 3.9 (Distance intrinsèque dans un domaine.)**.** Le but est de cet exercice est de définir la notion de *distance intrinsèque* dans un domaine de $\mathbb{R}^n$ (par définition, un *domaine* de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert et connexe).

Soit donc $U \subset \mathbb{R}^n$ et $p, q \in U$. On note $\mathcal{C}_{pq}$ l'ensemble des courbes $\gamma : [a,b] \to U$ qui sont continues, de classe C^1 par morceaux et qui relient p à q. On défini alors la *distance intrinsèque* dans U de p à q par

$$\delta_U(p,q) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}_{pq}\}.$$

(a) Prouver que $\mathcal{C}_{pq} \neq \emptyset$ pour tous $p, q \in U$.

(b) Prouver que $\delta_U(p,q) \geq \|q-p\|$ pour tous $p, q \in U$.

(c) Prouver que (U, δ_U) est un espace métrique.

(d) A quelle condition sur le domaine U a-t-on $\delta_U(p,q) = \|q-p\|$ pour tous $p, q \in U$? (donner une condition suffisante).

(e) Considérons le cas du domaine $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -1 \text{ ou } y \neq 0\}$. Quelle est la distance intrinsèque entre les points $p = (0,1)$ et $q = (0,-1)$?
Est-ce qu'il existe une courbe de longueur minimale reliant p à q?

(On dit que $\delta_U(p,q)$ est la *distance intrinsèque* de p à q dans le domaine U et que $d(p,q) = \|q-p\|$ est la distance euclidienne *extrinsèque*).

Solution 3.9. (a) Pour montrer que $\mathcal{C}_{p,q}$ est non-vide, il suffit de montrer que U est connexe par arcs C^1 par morceaux. Soit U^0 la composante connexe par arcs C^1 par morceaux de p. Montrons qu'elle est à la fois ouverte et fermée dans U.
Elle est ouverte car si l'on prend $x \in U^0$ et $\rho > 0$ suffisamment petit, alors $B(x,\rho) \subseteq U^0$. En effet il existe $\rho > 0$ tel $B(x,\rho) \subseteq U$ car U est ouvert. Tout point $y \in B(x,\rho)$ est relié à p par le chemin C^1 par morceaux qui est la concaténation des deux chemins suivants : le chemin qui relie p à x et la ligne droite qui relie x à y.

L'ensemble $U \setminus U^0$ est l'union des autre composantes connexes par arcs C^1 par morceaux de U, qui sont ouvertes dans U pour la même raison. $U \setminus U^0$ est donc ouvert dans U. Par conséquent U^0 est fermé dans U pour la topologie relative. On a montré que U^0 est à la fois ouvert, fermé et non-vide, dans l'ensemble connexe U. Ainsi $U = U^0$ est connexe par arcs.

(b) On a vu au cours que pour tout chemin $\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}$ on a $\ell(\gamma) \geq \|q - p\|$. On a donc

$$\delta_U(p,q) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}_{pq}\} \geq \|q - p\|.$$

(c) On vérifie que δ_U est une métrique sur U.

(i) Clairement $\delta_U(p,q) \geq 0$ pour tous $p, q \in U$ et $\delta_U(p,p) = 0$.

(ii) On a $\delta_U(p,q) = \delta_U(q,p)$ car on a une bijection naturelle entre $\mathcal{C}_{p,q}$ et $\mathcal{C}_{q,p}$ (l'inversion de chemin), qui préserve les longueurs.

(iii) Pour l'inégalité du triangle, soient $p, q, r \in U$. Soient $\alpha \in \mathcal{C}_{p,q}$ et $\beta \in \mathcal{C}_{q,r}$, on note γ la concaténation de α et β. On a :

$$\delta_U(p,r) \leqslant \ell(\gamma) = \ell(\alpha) + \ell(\beta).$$

Si on prend l'infimum sur α et β on a bien :

$$\delta_U(p,r) \leqslant \delta_U(p,q) + \delta_U(q,r).$$

(iv) δ_U sépare les points car $\delta_U(p,q) \geq \|q - p\| > 0$ si $p \neq q$.

(d) Si U est convexe, alors $\delta_U(p,q) = \|q - p\|$ pour tous $p, q \in U$.

(e) Le domaine U est le plan $\mathbb{R}^2$ privé de la demi droite définie par $y = 0$ et $x \geq -1$. Pour tout $u < -1$, on peut considérer la réunion des segments de droites de p à $m = (u, 0)$ et de m à q. Cette courbe est de longueur $2\sqrt{1 + u^2}$ et donc on a

$$\delta_U(p,q) \leq \inf_{u<-1} 2\sqrt{1 + u^2} = 2\sqrt{2}.$$

En fait on a égalité car toute courbe continue γ reliant p à q doit passer par un point $m = (u, 0)$ avec $u < -1$. On a donc

$$\ell(\gamma) \geq \delta_U(p,m) + \delta_U(m,q) \geq \|p - m\| + \|q - m\| = 2\sqrt{1 + u^2},$$

et donc

$$\delta_U(p,q) \geq \inf_{u<-1} 2\sqrt{1 + u^2} = 2\sqrt{2}.$$