Exercice 2.1. Prouver les formules suivantes concernant le produit vectoriel :

Pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ *on a*

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \, \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \, \mathbf{a}$ (première dentité de Grassmann),

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \, \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \, \mathbf{c}$ (seconde identité de Grassmann).

(iii) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \, \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \, \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ (identité de Lagrange).

(iv) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$.

Indication. En choisissant une base orthonormée directe bien adaptée au problème, on peut simplifier les calculs.

Solution 2.1. Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ non nuls. Il est toujours possible de trouver une base orthonormée directe $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ telle que

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= a_1 \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{b} &= b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 \\
\mathbf{c} &= c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{d} &= d_1 \mathbf{e}_1 + d_2 \mathbf{e}_2 + d_3 \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

par exemple en prenant $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}, \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1}{||\mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1||}$ si $\mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1$ est non nul, sinon on peut prendre pour $\mathbf{e}_2$ n'importe quel vecteur unitaire perpendiculaire à $\mathbf{e}_1$ et finalement $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$.
On calcule alors :

(i)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (a_1 b_2 \mathbf{e}_3) \times \mathbf{c} &= -a_1 b_2 c_2 \mathbf{e}_1 + a_1 b_2 c_1 \mathbf{e}_2 \\
\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a} &= a_1 c_1 b_1 \mathbf{e}_1 + a_1 c_1 b_2 \mathbf{e}_2 - (b_1 c_1 + b_2 c_2) a_1 \mathbf{e}_1 \\
&= a_1 b_2 c_1 \mathbf{e}_2 - a_1 b_2 c_2 \mathbf{e}_1
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_1 \mathbf{e}_1 \times (b_2 c_3 \mathbf{e}_1 - b_1 c_3 \mathbf{e}_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)) \\
&= -a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \mathbf{e}_2 - a_1 b_1 c_3 \mathbf{e}_3 \\
\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c} &= a_1 c_1 b_1 \mathbf{e}_1 + a_1 c_1 b_2 \mathbf{e}_2 - a_1 b_1 c_1 \mathbf{e}_1 - a_1 b_1 c_2 \mathbf{e}_2 - a_1 b_1 c_3 \mathbf{e}_3 \\
&= a_1 b_2 c_1 \mathbf{e}_2 - a_1 b_1 c_2 \mathbf{e}_2 - a_1 b_1 c_3 \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle &= \langle a_1 b_2 \mathbf{e}_3, (c_2 d_3 - c_3 d_2) \mathbf{e}_1 + (c_3 d_1 - c_1 d_3) \mathbf{e}_2 + (c_1 d_2 - c_2 d_1) \mathbf{e}_3 \rangle \\
&= a_1 b_2 c_1 d_2 - a_1 b_2 c_2 d_1 \\
\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle &= a_1 c_1 (b_1 d_1 + b_2 d_2) - a_1 d_1 (b_1 c_1 + b_2 c_2) \\
&= a_1 b_2 c_1 d_2 - a_1 b_2 c_2 d_1
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\langle(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle &\overset{(i)}{=}\langle\langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle\mathbf{b}-\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle\mathbf{a},\mathbf{d}\rangle\\ &=\langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle\langle\mathbf{b},\mathbf{d}\rangle-\langle\mathbf{a},\mathbf{d}\rangle\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle\\ &\overset{(iii)}{=}\langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}\times\mathbf{d}\rangle\end{aligned}$$

Exercice 2.2. Montrer que pour tous $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$ on a

i) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=0$ (première identité de Jacobi)

ii) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$ (deuxième identité de Jacobi.)

Solution 2.2. On rappelle tout d'abord la première identité de Grassmann :

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle\mathbf{b}-\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle\mathbf{a}.$$

On a donc (en utilisant la symétrie du produit scalaire) :

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}&=\langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle\mathbf{b}-\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle\mathbf{a}+\langle\mathbf{b},\mathbf{a}\rangle\mathbf{c}-\langle\mathbf{c},\mathbf{a}\rangle\mathbf{b}+\langle\mathbf{c},\mathbf{b}\rangle\mathbf{a}-\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\mathbf{c}\\ &=\langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle\mathbf{b}-\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle\mathbf{a}+\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\mathbf{c}-\langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle\mathbf{b}+\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle\mathbf{a}-\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\mathbf{c}\\ &=0.\end{aligned}$$

La deuxième identité de Jacobi se prouve de la même manière en utilisant la seconde identités de Grassmann. On peut aussi la déduire de la première identité de Jacobi et de l'antisymétrie du produit vectoriel :

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=-((\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c})=0.$$

Voici un autre raisonnement pour prouver (par exemple la première) identité de Jacobi basé sur un argument de trilinéarité. Il s'agit de prouver que l'application $\mathbf{f}:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z}+(\mathbf{y}\times\mathbf{z})\times\mathbf{x}+(\mathbf{z}\times\mathbf{x})\times\mathbf{y},$$

est identiquement nulle. Il est clair que $\mathbf{f}$ est trilinéaire, il suffit donc de vérifier que $\mathbf{f}$ s'annule sur une base orthonormée directe $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$. De plus $\mathbf{f}$ est invariante au signe près lorsqu'on permute les variables, ce qui réduit le nombre de calculs à effectuer.
On remarque d'abord que

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)&=(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\times\mathbf{e}_3+(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)\times\mathbf{e}_1+(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)\times\mathbf{e}_2\\ &=\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2\\ &=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

Par permutation, on a donc plus généralement $\mathbf{f}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)=\mathbf{0}$ si les trois indices i,j,k sont deux-à-deux distincts. Lorsque les indices ne sont pas distincts, cette expression s'annule aussi car

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)&=(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_i)\times\mathbf{e}_j+(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j)\times\mathbf{e}_i+(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_i)\times\mathbf{e}_i\\ &=(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j)\times\mathbf{e}_i-(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j)\times\mathbf{e}_i\\ &=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

Exercice 2.3. Le produit vectoriel dans $\mathbb{E}^3$ est-il associatif ?

Solution 2.3. Non, le produit vectoriel n'est pas associatif. L'identité de Jacobi peut s'écrire

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

(on utilise l'antisymétrie du produit vectoriel); cetet identité mesure donc la "non associativité" du produit vectoriel.

On peut aussi le voir sur un exemple : si $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{E}^3$, alors

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1) \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \qquad \text{mais} \qquad \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2.$$

On fera donc attention de ne jamais écrire une expression ambigüe du type $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$..

Exercice 2.4. (a) Rappeler ce qu'est une *similitude* d'un espace vectoriel euclidien.

(b) Prouver que les similitudes d'un espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}^n$ forment un groupe.

(c) Prouver que les isométries forment un sous-groupe normal du groupe des similitudes.

(d) Expliquer pourquoi une similitude qui fixe l'origine $0 \in \mathbb{E}^n$ est une application linéaire.

(e) Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes pour application linéaire inversible $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$:

  (i) f est une similitude.

  (ii) f préserve les angles, i.e. si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ sont non nuls, alors l'angle entre $f(\mathbf{a})$ et $f(\mathbf{b})$ est égal à l'angle entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

  (iii) f préserve l'orthogonalité, i.e. si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ alors $f(\mathbf{a}) \perp f(\mathbf{b})$.

(f) On peut identifier $\mathbb{C}$ au plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une similitude linéaire directe si et seulement si f est la multiplication par un nombre complexe non nul (i.e. on a $f(z) = az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$).

Solution 2.4. (a) Une *similitude* d'un espace vectoriel euclidien est une application $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ qui vérifie $d(f(x), f(y)) = \lambda d(x, y)$, avec $\lambda > 0$ indépendant de x et y (c'est le *rapport de similitude*).

Remarques : (1) On a vu au cours qu'une similitude est une transformation affine : plus précisément une similitude de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire $f(x) = \lambda Ax + b$ où A est une matrice orthogonale.
(2) Le mot "figure" en géométrie euclidienne signifie simplement un ensemble de points, donc un sous-ensemble de $\mathbb{E}^n$. Deux figures sont *semblables* si une similitude transforme la première figure en la seconde (c'est la raison pour laquelle on appelle ces transformations des *similitudes*). Deux figures sont ainsi semblables lorsque toutes les distances sont multipliées par une même constante.

(b) Si $f_1, f_2 : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ sont deux similitudes de rapports λ_1 et λ_2, alors $f_2 \circ f_1$ vérifie pour tous $x, y \in \mathbb{E}^n$:

$$d(f_2 \circ f_1(x), f_2 \circ f_1(y)) = d(f_2(f_1(x)), (f_1(y))) = \lambda_2 d(f_1(x), f_1(y)) = \lambda_2 \lambda_1 d(x, y),$$

c'est donc une similitude de rapport $\lambda_1 \lambda_2$. On vérifie de même que si f est une similitude de rapport λ, alors f^{-1} est une similitude de rapport $1/\lambda$. On a montré que les similitudes forment un sous-groupe du groupe des bijections de l'espace $\mathbb{E}^n$ dans lui-même.
(On peut aussi démontrer que les similitudes forment un groupe à partir de la caractérisation affine $f(x) = \lambda Ax + b$ avec $A \in O(n)$).

(c) Les isométries sont les similitudes de rapport 1, par ce qui précède la composition de deux isométries est une isométrie et l'inverse d'une isométrie est une isométrie, donc les isométries forment un sous-groupe. Ce sous-groupe est normal car si f est une similitude de rapport λ et g est une isométrie, alors $f \circ g \circ f^{-1}$ est une similitude de rapport $\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1$, c'est donc une isométrie.

(d) Au cours on a démontré que les similitudes sont des transformations affines (voir le théorème 1.6), or une transformation affine d'un espace vectoriel qui préserve l'origine est une transformation linéaire.

(e) Pour la question (e), les preuves de (i) $\Rightarrow$ (ii) et (ii) $\Rightarrow$ (iii) suivent très facilement des définitions. La preuve de (iii) $\Rightarrow$ (i) se fait de la façon suivante : soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de $\mathbb{E}^n$, et notons $v_i = f(e)_i$ Alors $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de $\mathbb{E}^n$ (car on suppose f inversible) et $v_i \perp v_j$ si $i \neq j$ par l'hypothèse (iii). On utilise maintenant aussi que $(e_i + e_j) \perp (e_i - e_j)$, et par conséquent $(v_i + v_j) \perp (v_i - v_j)$. On a donc

$$0 = \langle v_i + v_j, v_i - v_j \rangle = \langle v_i, v_i \rangle + \langle v_i, v_k \rangle - \langle v_k, v_i \rangle - \langle v_k, v_k \rangle = \|v_i\|^2 - \|v_j\|^2.$$

On a ainsi montré que $\|v_i\| = \|v_j\|$ pour tous $i, j = 1, \dots, n$. Nous pouvons maintenant prouver f est une similitude de rapport $\lambda = \|v_i\|$ de la façon suivante : Soit x un élément quelconque de $\mathbb{E}^n$. On peut écrire

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad \text{et donc } \; f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

On détermine maintenant la norme de $f(x)$ en calculant

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|v_i\|^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

(on a utilise dans ce calcul que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ et $\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 = \lambda)$).

(f) Supposons que l'application f s'écrit $f(z) = az$ en notation complexe avec $a \neq 0$. En posant $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) et $a = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, on calcule directement que

$$f(z) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \cdot (x + iy) = r\left((\cos(\theta)x - \sin(\theta)y) + (\sin(\theta)x + \cos(\theta)y)i\right),$$

que l'on peut représenter matriciellement par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.,$$

qui est bien une similitude (comparer avec le théorème 1.6 du polycopié).

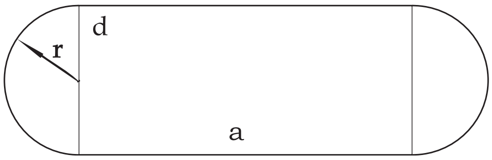
Pour prouver l'implication inverse, on suppose que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une similitude linéaire, alors on peut écrire $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont les images de la base canonique. Ils doivent donc être orthogonaux et de même norme, de plus le déterminant de cette matrice doit être positif puisque la similitude f est supposée directe (i.e. elle préserve l'orientation du plan). On a donc les relations suivantes :

$$ac + bd = 0, \qquad a^2 + b^2 = c^2 + d^2, \qquad ad - bc > 0.$$

Ces relations entraînent que $c = -b$ et $d = a$ et donc $f(x, y) = (ax - by, bx + ay)$, ou si on préfère en notation complexe : $f(z) = (a + ib)z$.

Exercice 2.5. Donner un exemple de courbe fermée simple qui est de classe C^1, mais pas de classe C^2.

Solution 2.5. Un exemple classique de courbe qui est de classe C^1, mais pas de classe C^2 est le “stade”. C'est la courbe qu'on obtient en complétant deux segments parallèles de longueur a, séparés d'une distance $d = 2r$ par deux demi-cercles de rayon r reliant les extrêmités de ces segments.



Le stade est une courbe fermée simple du plan, on peut par exemple la paramètrer à vitesse constante (il faut écrire plusieurs formules). La courbe est de classe C^1 (car on a une tangente variant continument), mais aux 4 points de raccordement l'accélération présente une discontinuité : elle est nulle sur les segments mais de norme constante sur les arcs de cercle. La courbe n'est donc pas de classe C^2.

Exercice 2.6. A quelle condition le graphe d'une fonction f représente-t-il une courbe birégulière ?

Solution 2.6. La réponse est que le graphe d'une fonction f représente-t-il une courbe birégulière si et seulement si la fonction f est de classe C^2 et se seconde dérivée f'' ne s'annule pas.

Explication: Rappelons qu'une courbe α est dite birégulière si elle est de classe C^2 et si $\dot{\alpha}(t)$ et $\ddot{\alpha}(t)$ sont linéairement indépendants pour tout $t \in I$. Dans le cas du graphe $\gamma_f(x) = (x, f(x))$ d'une fonction f, cela veut dire que f est de classe C^2 et $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. En effet $\dot{\gamma}_f(x) = (1, f'(x))$ et $\ddot{\gamma}_f(x) = (0, f''(x))$ sont linéairement indépendants si et seulement si $f''(x) \neq 0$.

Exercice 2.7. Par définition, la longueur d'un arc de courbe $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est l'intégrale $\ell(\alpha) = \int_a^b V_\alpha(u)du$ où $V_\alpha(u) = \|\dot{\alpha}(u)\|$ est la vitesse de α.

Calculer la longueur des courbes suivantes :

(a) $\alpha(u) = (\cos(u), \sin(u), u)$. $\quad -\pi \leq u \leq \pi$ $\quad$ (la courbe α est une hélice circulaire droite).

(b) $\beta(u) = (\mathrm{e}^u\,,\, \mathrm{e}^{-u}\,,\, \sqrt{2}u)$. $\quad 0 \leq u \leq t$.

(c) $\gamma(u) = (u\cos(u), u\sin(u))$. $\quad 0 \leq u \leq 4\pi$ $\quad$ (la courbe γ est une spirale d'Archimède).

Solution 2.7. (a) La longueur de α est

$$\ell(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \|\dot{\alpha}(u)\| du = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2}\, du = 2\sqrt{2}\pi.$$

Pour les deux questions suivantes, et en général pour ce cours, il est important d'être familier avec les fonctions hyperboliques. Sur Moodle vous trouverez un "Formulaire et Table d'Intégration" très utile. Voir pages 72–75 pour les définitions et propriétés des fonctions hyperboliques.

(b) La vitesse de la courbe β est

$$V_\beta(u) = \|\dot{\beta}(u)\| = \sqrt{e^{2u} + e^{-2u} + 2} = e^u + e^{-u} = 2\cosh(u),$$

la longueur de cette courbe est donc

$$\ell(\beta) = \int_0^t V_\beta(z)du = 2\sinh(t).$$

(c) On a

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma) = \int_0^{4\pi} \|\dot{\gamma}(u)\| du &= \int_0^{4\pi} \sqrt{u^2+1}\, du \\
&= \frac{1}{2}(u\sqrt{u^2+1} + \log(u + \sqrt{u^2+1}))\Big|_0^{4\pi} \\
&= 2\pi\sqrt{16\pi^2+1} + \frac{1}{2}\log(4\pi + \sqrt{16\pi^2+1}).
\end{aligned}$$

Remarque Dans ce dernier exemple, pour trouver une primitive de $\sqrt{1+u^2}$ on peut consulter une table d'intégration. On peut aussi raisonner ainsi : On pose $u = \sinh(t)$, alors $\sqrt{1+u^2} = \cosh(t)$ et $du = \cosh(t)dt$, donc

$$\int \sqrt{1+u^2} du = \int \cosh(t)^2 dt.$$

On intègre par parties:

$$\begin{aligned}
\int \cosh(t)^2 dt &= \int \cosh(t)\sinh'(t)dt \\
&= \cosh(t)\sinh(t) - \int \cosh'(t)\sinh(t)dt \\
&= \cosh(t)\sinh(t) - \int \sinh(t)^2 dt \\
&= \cosh(t)\sinh(t) - \int \left(\cosh(t)^2 - 1\right) dt.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int \cosh(t)^2 dt = \frac{1}{2}\left(t + \sinh(t)\cosh(t)\right) + C = \frac{1}{2}\left(t + \sinh(t)\sqrt{1+\sinh(t)^2}\right) + C,$$

où C est une constante d'intégration. Finalement,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+u^2} du &= \int \cosh(t)^2 dt \\
&= \frac{1}{2}\left(t + \sinh(t)\sqrt{1+\sinh(t)^2}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(\log\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) + u\sqrt{1+u^2}\right) + C,
\end{aligned}$$

car $t = \sinh^{-1}(t) = \mathrm{Arcsinh}(u) = \log\left(u + \sqrt{u^2+1}\right)$.

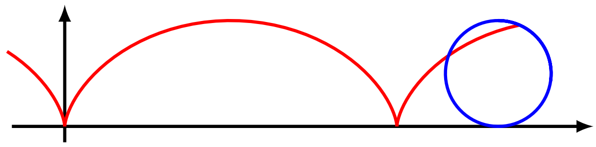
Exercice 2.8. La cycloïde est la courbe décrite par un point sur le bord d'une roue qui roule, sans glisser, en ligne droite.

(a) Dessiner une cycloïde

(b) Donner un paramétrage de la cycloïde (préciser d'abord le choix de la situation et du système de coordonnées).

(c) Calculer la longueur d'une arche de la cycloïde (en supposant que la roue engendrant la cycloïde est de longueur r)

Solution 2.8. (a)



(b) Soit P un point du bord de la roue de rayon r et de centre C. Nous ferons rouler la roue sur l'axe Ox_1. Au temps $t = 0$, nous plaçons la roue de manière à ce que le point P coïncide avec l'origine. Après un temps t, le rayon passant par P formera un angle t avec le rayon vertical. La roue aura parcouru une distance rt.
Nous désirons calculer les coordonnées du point P en fonction de t. Nous avons

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} rt \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\sin t \\ -r\cos t \end{pmatrix}$$

où A est le point de l'intersection (le point mouvant) de la roue avec l'axe Ox_1. D'où une paramétrisation de la cycloïde

$$\gamma(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t)) \ .$$

(c) Le vecteur vitesse vaut $\dot{\gamma}(t) = (r(1 - \cos t), r\sin t)$ et la vitesse vaut $||\dot{\gamma}(t)|| = r\sqrt{2(1 - \cos t)}$. La longueur d'un arche de cycloïde est donc

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} ||\dot{\gamma}(t)||\, dt = r\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = r\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin(\tfrac{t}{2})^2}\, dt \\ &= 2r\int_0^{2\pi} \sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\, dt = 2r \cdot \left[-2\cos(\tfrac{t}{2})\right]_{t=0}^{2\pi} = 8r \end{aligned}$$

Notons qu'il est légitime de remplacer $\sqrt{\sin(\frac{t}{2})^2}$ par $\sin(\frac{t}{2})$ car $\sin(\frac{t}{2}) \geq 0$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 2.9. Discuter le *paradoxe de la roue d'Aristote.*
On considère deux roues attachées solidairement ensemble et centrées sur un même axe, l'une de rayon 2 et l'autre de rayon 1. On fait rouler ces roues (solidairement) sur une route pendant un tour de roue. Le centre de la grande roue s'est alors déplacé d'une distance de 4π et celui de la petite roue d'une distance de 2π. Conclusion $4\pi = 2\pi$.

Solution 2.9. L'affirmation selon laquelle le centre de la grande roue se déplace d'une distance de 2π suppose que la roue roule *sans glisser*. Si c'est le cas, alors la petite roue ne roule pas, ou du moins pas sans glisser. Il est donc inexact d'affirmer que le centre de la petite roue se déplace d'une distance de 4π.
Si on fabrique ce mécanisme en utilisant deux roues dentées solidairement fixées en leur centre et qu'on les place sur deux crémaillères parallèles, alors on obtient un mécanisme rigide, qui ne peut pas tourner.

Voir aussi la vidéo (13 minutes) `https://www.youtube.com/watch?v=mrVg9GM5h7Q`

Remarque. Le problème du *roulement sans glissement* se pose aussi en mécanique automobile (lorsqu'une voiture prend un virage, l'une des roues doit rouler plus vite que l'autre, comment gérer ce problème avec les roues motrices ? Ce problème se résout par un *différentiel*.

Voir les explications sur Wikipedia `https://fr.wikipedia.org/wiki/Diff%C3%A9rentiel_(m%C3%A9canique)` et la vidéo `https://youtu.be/yYAw79386WI`