EPFL - Automne 2023	M. Troyanov
MATH 213: Géométrie Différentielle	**Solution Exercices**
Série 1	automne 2024

La géométrie différentielle peut très brièvement se résumer dans l'idée d'appliquer des méthodes de calcul différentiel et d'analyse à des problèmes de géométrie, en particulier à l'étude des courbes, des surfaces et d'objets généralisant ces notions. Toutefois le géométrie différentielle ne se réduit pas au seul usage du calcul différentiel mais fait intervenir d'autres techniques telles que celles de l'algèbre linéaire, de la géométrie vectorielle, la théorie des groupes, la topologie, ainsi que la géométrie euclidienne classique. Cette première série d'exercices propose de revisiter le produit vectoriel d'une part, et de construire une preuve de l'inégalité isopérimétrique dans le plan d'autre part.

Exercice 1.1. On rappelle que le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis dans une base orthonormée directe (i.e. d'orientation positive) par $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ et $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$ est le vecteur

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\times\mathbf{y} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j\, \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{e}_3 \\
&= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Prouver que $\mathbf{a}\times\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ est uniquement déterminé par les conditions géométriques suivantes :

(a) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$ et $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$.

(b) $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \text{aire}(\mathcal{P}(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ (où $\mathcal{P}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ est le parallélogramme construit sur les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$).

(c) Si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont linéairement indépendants, alors $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$ est une base d'orientation positive de $\mathbb{R}^3$.

Solution 1.1. Une solution de cet exercice est donnée dans le polycopié, voir la preuve de la proposition 1.12.

Une autre solution consiste à exploiter le groupe $SO(3)$ pour se ramener au cas très simple où les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont combinaisons linéaires des deux premiers vecteurs de base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Voici les détails : Soient $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. On note $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ le vecteur défini par la formule en coordonnées et $\mathbf{x}*\mathbf{y}$ le vecteur défini par les propriétés (a), (b) et (c) (qui est bien défini par sa direction, son sens et sa norme). On veut monter que $\mathbf{x}\times\mathbf{y} = \mathbf{x}*\mathbf{y}$ pour tous vecteurs $\mathbf{x},\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^3$.
D'abord, on remarque que si $\phi \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ alors

$$\phi(\mathbf{x}*\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) * \phi(\mathbf{y}). \tag{1}$$

En effet si la famille $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ est liée, les deux côtés de cette inégalités sont nuls. Si elle est libre, alors par définition

$$\{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{x}*\mathbf{y}\}$$

est une base d'orientation positive et donc

$$\{\phi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{y}),\phi(\mathbf{x}*\mathbf{y})\}$$

est aussi une base d'orientation positive. Si on applique (c) à $\phi(\mathbf{x}) * \phi(\mathbf{y})$, cela signifie que ce vecteur est positivement colinéaire à $\phi(\mathbf{x} * \mathbf{y})$. De plus:

$$\|\phi(\mathbf{x}) * \phi(\mathbf{y})\| = \text{aire}\,\mathcal{P}(\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})) = \text{aire}\,\mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} * \mathbf{y}\| = \|\phi(\mathbf{x} * \mathbf{y})\|\,.$$

L'égalité (1) est donc établie car les deux vecteurs ont même direction, même sens et même norme.
Montrons de même que

$$\phi(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) \times \phi(\mathbf{y}). \tag{2}$$

Par bilinéarité des deux termes en $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, il suffit de le vérifier sur la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Par exemple:

$$\phi(\mathbf{e}_1) \times \phi(\mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} \phi_{2,1} & \phi_{2,2} \\ \phi_{3,1} & \phi_{3,2} \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} \\ \phi_{3,1} & \phi_{3,2} \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \tag{3}$$

$$\phi(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \phi(\mathbf{e}_3) = \phi_{1,3}\mathbf{e}_1 + \phi_{2,3}\mathbf{e}_2 + \phi_{3,3}\mathbf{e}_3. \tag{4}$$

L'égalité entre les deux précédents termes découlent du fait que $\phi \in SO_3$:

$$\phi^{-1} = \phi^{\mathsf{T}} \text{ et } \det\phi = 1$$

ce qui donne avec la formule de la comatrice:

$$\text{comatrice}\,\phi = \det(\phi) \cdot \left(\phi^{-1}\right)^{\mathsf{T}} = \phi.$$

Nous pouvons faire même pour tous les autres vecteurs de base et ainsi obtenir (2).
Les conditions (2) et (1) permettent de se ramener par rotation à l'étude des restrictions

$$\times, * : \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \to \text{Vect}(\mathbf{e}_3).$$

Si ces restrictions coïncident, alors par action de $SO_3(\mathbb{R})$ on aura l'égalité $\times = *$ sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Mais pour les restriction, il est clair que $\times, * : \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \to \text{Vect}(\mathbf{e}_3)$ sont bilinéaires et antisymétriques : c'est évident pour $\times$ en général (les déterminants sont bilinéaires et antisymétriques) et pour $*$, il s'agit de remarquer que (b) et (c) donnent:

$$(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) * (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3.$$

Comme elles sont bilinéaires, on vérifie l'égalité sur la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Le seul terme non-nul est:

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3.$$

Les restrictions coïncident et nous avons donc prouvé le résultat souhaité.

Les exercices qui suivent visent à démontrer l'inégalité isopérimétrique dans le plan. Considérons un domaine borné D contenu dans la plan $\mathbb{R}^2$. Son bord ∂D est la réunion d'une ou plusieurs courbes et on appelle périmètre de D la longueur totale de ∂D (qui peut éventuellement être infinie). Le quotient isopérimétrique de D est défini par

$$\text{Isp}(D) = \frac{(\text{Longueur}(\partial D))^2}{\text{Aire}(D)}.$$

L'inégalité isopérimétrique dans le plan affirme que *le quotient isopérimétrique minimal parmi tous les domaines du plan est atteint pour les disques, i.e. pour tout domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$ on a*

$$\text{Isp}(D) \geq \text{Isp}(\mathbb{B}^2),$$

où $\mathbb{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$ est le disque unité du plan. De plus on a égalité si et seulement si D est un disque (de rayon quelconque).

Avant de commencer les exercices qui suivent, prenez un moment pour réfléchir à cette inégalité; vous pouvez en discuter entre vous. Comprenez-vous ce qu'elle signifie? Quel genre de raisonnement faut-il faire pour établir une preuve de cette inégalité ?

Exercice 1.2. (a) Prouver que le quotient isopérimétrique est invariant par similitude (une similitude du plan ou de l'espace euclidien est une bijection qui préserve les rapport de distances; c'est donc la composition d'une homothétie et d'une isométrie).

(b) Calculer le quotient isopérimétrique d'un carré, d'un triangle équilatéral et d'un disque.

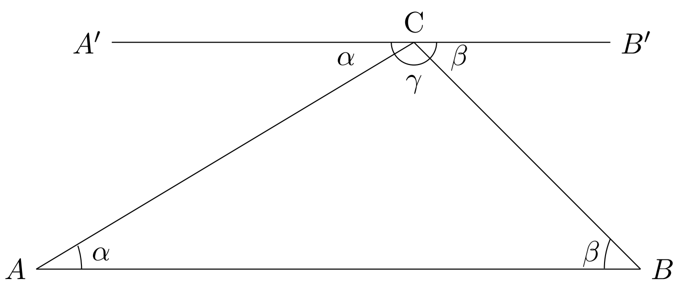
Solution 1.2. (a) Si deux domaines D_1 et D_2 du plan sont isométriques, alors ils ont clairement même aire et même périmètre. Si D_2 est un homothétique de D_1, de rapport $\lambda > 0$, alors le périmètre de D_2 est égal à λ fois le périmètre de D_1 et l'aire D_2 est égale à λ^2 fois l'aire de D_1. Les deux domaines ont donc même quotient isopérimétrique.

(b) Les quotients isopérimétriques d'un carré, d'un triangle équilatéral et d'un disque sont respectivement 16, $36/\sqrt{3}$ et 4π.

Le but des exercices 1.3 à 1.9 est de conduire à une preuve de l'inégalité isopérimétrique dans le plan. On utilisera uniquement des résultats de géométrie euclidienne de base et des propriétés intuitives élémentaires des notions de longueur et d'aire.

Exercice 1.3. Prouver la proposition 32 du livre 1 des Éléments d'Euclide. Cette proposition dit que la somme des angles de tout triangle est égale à deux angles droits.
Indication. Il faut utiliser le postulat des parallèle[1].

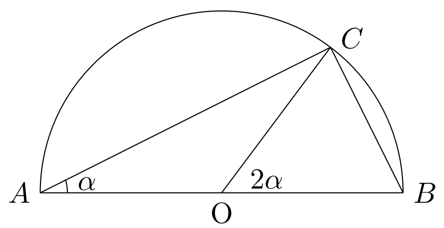
Solution 1.3. On considère un triangle ABC du plan dont on note les angles en A, B, C respectivement par α, β, γ. Par le postulat des parallèles, on sait qu'il existe une unique droite (disons $A'B'$) passant par C et parallèle à la droite AB. Il reste à vérifier que $\sphericalangle_C AA' = \alpha$ et $\sphericalangle_C BB' = \beta$. Pour cela on applique une rotation de centre le milieu du segment $[A, C]$ (respectivement du segment $[B, C]$) et d'angle π. On a montré que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.



Exercice 1.4. (a) Soit C un point sur le cercle de diamètre $[A, B]$ (supposé distinct de A et B). Prouver que l'angle en O du triangle OCB est le double de l'angle en A du triangle ACB:

$$\sphericalangle_O CB = 2 \sphericalangle_A CB$$

(on écrit aussi $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$).



[1]Le postulat des parallèle, aussi appelé 5ème postulat d'Euclide énonce que dans un plan, par tout point extérieure à une droite il passe une unique parallèle à cette droite.

(b) Prouver ensuite le théorème du demi-cercle de Thales : Le triangle ABC est un triangle rectangle en C si et seulement le point C est un point du cercle de diamètre $[A, B]$ (rappelons que ABC est un triangle rectangle en C si $\sphericalangle_C AB = \pi/2$).

Solution 1.4. (a) Posons les notations suivantes:

$$\alpha = \sphericalangle_A CB, \quad \beta = \sphericalangle_B CA, \quad \gamma = \sphericalangle_O BC, \quad \delta = \sphericalangle_O AC.$$

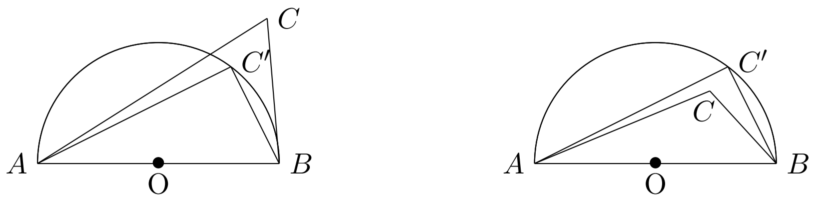
Les triangles OAC et OBC sont isocèles (car inscrits dans le cercle), on a donc aussi

$$\alpha = \sphericalangle_C OA, \quad \beta = \sphericalangle_C OB, \quad (\alpha + \beta) = \sphericalangle_C AB.$$

En appliquant l'exercice 1.5 aux triangles ABC et OBC on voit que $2\alpha + 2\beta = \pi$ et $\gamma + 2\beta = \pi$. Par conséquent $\gamma = \pi - 2\beta = 2\alpha$.

(b) Pour prouver le théorème de Thalès, on observe d'abord que si le point C est sur cercle de diamètre $[A, B]$, alors, avec les notation précédentes, on a $\sphericalangle_C AB = (\alpha + \beta) = \pi/2$ puisque $2\alpha + 2\beta = \pi$. Le triangle ABC est donc un triangle rectangle en C.

Pour prouver le sens inverse, on suppose que le point C n'est pas situé sur le cercle de diamètre $[A, B]$, et on note C' le point d'intersection de la droite OC avec le cercle. On distingue deux cas: si le point C est à l'extérieur du cercle, alors C' est à l'intérieur du triangle ABC et on a $\sphericalangle_C AB < \sphericalangle_{C'} AB = \pi/2$. Si par contre le point C est à l'intérieur du cercle, alors c'est le point C qui est à l'intérieur du triangle ABC' et on a $\sphericalangle_C AB > \sphericalangle_{C'} AB = \pi/2$. Finalement, $\sphericalangle_C AB = \pi/2$ si et seulement si le point C est sur le cercle de diamètre $[A, B]$.



Remarque. En raison de cette construction, on appelle *cercle de Thalès du segment* $[A, B]$ le cercle dont $[A, B]$ est le diamètre.

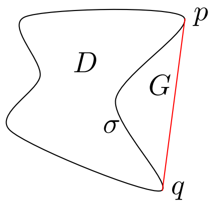
Exercice 1.5. Prouver que parmi tous les triangles ABC tels que $x = d(A, C)$ et $y = d(B, C)$, celui qui maximise l'aire est le triangle rectangle en C.

Solution 1.5. L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} xy \sin(\gamma)$ où $\gamma = \sphericalangle_C AB$. Cette quantité atteint son maximum lorsque $\sin(\gamma) = 1$, donc lorsque γ est un angle droit.

Exercice 1.6. Rappelons qu'un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est convexe, si pour toute paire de points $A, B \in D$, le segment $[A, B]$ est contenu dans D. Prouver que si $D \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas convexe, alors ce domaine ne minimise pas le quotient isopérimétrique (i.e. on peut construire un autre domaine D' tel que $\mathrm{Isp}(D') < \mathrm{Isp}(D)$).

Solution 1.6. Si le domaine D n'est pas convexe, alors il existe un arc de courbe σ contenu dans le bord ∂D, limité par deux points $p, q \in \partial D$ tels que le sous-ensemble ouvert G dont le bord est la réunion de σ et du segment $[p, q]$ est disjoint de D. Alors le domaine $D' = D \cup G \cup \sigma$ est clairement d'aire plus grande que l'aire de D et sont périmètre est plus petit car la longueur de σ est plus grande que la longueur du segment $[p, q]$ (le segment de droite est le plus court chemin entre deux points).

Il est donc clair que $\mathrm{Isp}(D') < \mathrm{Isp}(D)$.



Exercice 1.7. Supposons que $D \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine isopérimétrique optimal (en particulier D est convexe), notons $\Gamma = \partial D$ son bord. Soient $A, B \in \Gamma$ deux points du bord de D qui partagent la courbe Γ en deux parties d'égales longueurs. Montrer alors que la corde $[A, B]$ partage D en deux régions d'aires égales.

Solution 1.7. On raisonne par l'absurde. Supposons que la corde $[A, B]$ partage D en deux régions D_1 et D_2 d'aires inégales, par exemple $\text{Aire}(D_1) > \text{Aire}(D_2)$. Notons D_1' la région du plan symétrique de D_1 par rapport à la droite AB et $D' = D_1 \cup D_1'$. Alors il est clair par construction que D et D' ont le même périmètre et

$$\text{Aire}(D') = \text{Aire}(D_1) + \text{Aire}(D_1) > \text{Aire}(D_1) + \text{Aire}(D_2) = \text{Aire}(D).$$

Par conséquent $\text{Isp}(D') < \text{Isp}(D)$, contredisant l'hypothèse que D est un domaine isopérimétrique.

Exercice 1.8. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine isopérimétrique optimal et Γ, A, B comme dans l'exercice précédent. Montrer alors que pour tout point P de Γ, différents de A et B, on a $\sphericalangle_P AB = \pi/2$.

Indication. Supposant par l'absurde que ça n'est pas le cas pour un certain point P, utiliser l'exercice 1.6 pour construire un domaine D' dont le périmètre est égal à celui de D mais $\text{Aire}(D') > \text{Aire}(D)$.

Solution 1.8. On raisonne de nouveau par l'absurde. Nous allons prouver que s'il existe un point $P \in \Gamma = \partial D$ tel que $P \neq A, B$ et le triangle ABP n'est pas rectangle en P, alors on peut construire un domaine D' tel que $\text{Isp}(D') < \text{Isp}(D)$.

Première étape : Notons σ_1 l'arc de Γ de A à P et σ_2 l'arc de Γ de P à B. Notons ensuite G_1 le domaine du plan limité par l'arc σ_1 et la corde $[A, P]$ et G_2 le domaine du plan limité par l'arc σ_2 et la corde $[P, B]$.

Deuxième étape : On construit un triangle $A'B'P'$ rectangle en P' et tel que $d(A', P') = d(A, P)$ et $d(B', P') = d(B, P)$. Par l'exercice 1.6 on sait que l'aire de $A'B'P'$ est strictement plus grande que l'aire de ABP. (Noter que $d(A', B') \neq d(A, B)$).

Troisième étape : On ajoute au triangle $A'B'P'$ une région G_1' isométrique à G_1, dont le bord contient l'arc A', P' et dont l'intérieur est disjoint du triangle $A'B'P'$. Ensuite on ajoute de même une région G_2' isométrique à G_2, dont le bord contient l'arc B', P' et dont l'intérieur est disjoint du triangle $A'B'P'$. On note D_1' le domaine obtenu.

Quatrième étape : On note maintenant D_2' le domaine symétrique de D_1' par rapport à la droite $A'B'$, puis on pose $D' = D_1 \cup D_2$. Par construction, le périmètre de ce domaine est le double de la somme des longueurs de σ_1 et σ_2, donc D' et D ont le même périmètre. D'autre part, la deuxième étape de la construction entraîne que $\text{Aire}(D') > \text{Aire}(D')$. On a donc $\text{Isp}(D') < \text{Isp}(D)$.

Exercice 1.9. A partir des exercices précédents, prouver l'inégalité isopérimétrique dans le plan : pour tout domaine du plan on a $\text{Isp}(D) \geq 4\pi$, avec égalité si et seulement si D est un disque (on admet l'existence d'un domaine isopérimétrique optimal, il s'agit ici de prouver l'unicité)

Solution 1.9. Les exercices 1.7, 1.9 et 1.5b entraînent que si D est un domaine isopérimétrique du plan, alors D est un domaine convexe dont le bord est un cercle.

Remarque. Il existe plusieurs preuves de l'inégalité isopérimétrique, assez différentes les unes des autres. La preuve étudiée ici est due à Ernst Steinitz (mathématicien allemand, 1871–1928). Notons aussi qu'il existe une généralisation de l'inégalité isopérimétrique pour les domaines dans $\mathbb{R}^n$, mais le preuve ci-dessus est spécifique au domaines plan. Quand à l'existence d'un domaine isopérimétrique (que nous avons supposée dans cette dérie d'exercices), elle peut se démontrer à partir d'un résultat de Wilhelm Blaschke (mathématicien autrichien 1885–1962): le *théorème de sélection de Blaschke*, qui affirme que toute suite bornée de domaines convexes contient une sous-suite qui converge "au sens de Hausdorff".
