Objectifs. Dans cette série, on continue l'étude des courbes sur les surfaces et les différentes notions de courbure. Il s'agit en particulier de se familiariser avec les méthodes de calculs, tout en faisant le lien avec la géométrie des surfaces.

A. Exercices standards.

Exercice 13.1. Calculer le tenseur métrique, la deuxième forme fondamentale et l'application de Weingarten de la caténoïde i.e. la surface de révolution de la chainette $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$.
On rappelle que cette surface peut se paramétriser ainsi (comme surface de révolution autour de l'axe Ox) :

$$\psi(s,\theta) = \left(\log(s+\sqrt{1+s^2}), \sqrt{1+s^2}\cos(\theta), \sqrt{1+s^2}\sin(\theta)\right).$$

Que valent la courbure moyenne et la courbure de Gauss de cette surface ?

Solution 13.1. Le repère adapté à la paramétrisation choisie est donné par

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 & = \dfrac{\partial\psi}{\partial s} = \dfrac{(1, s\cos(\theta), s\sin(\theta))}{\sqrt{1+s^2}}, \\ \mathbf{b}_2 & = \dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} = \sqrt{1+s^2}\,(0, -\sin(\theta), \cos(\theta)) \\ \boldsymbol{\nu} & = \dfrac{\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2\|} = \dfrac{(s, -\cos(\theta), -\sin(\theta))}{\sqrt{1+s^2}}. \end{cases}$$

La matrice du tenseur métrique est donc

$$\mathbf{G}(s,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+s^2 \end{pmatrix}$$

Les coefficients de la seconde forme fondamentale peuvent se calculer de plusieurs manières :

$$\begin{cases} h_{11} & = \langle \dfrac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial s}, \boldsymbol{\nu}\rangle = -\langle \mathbf{b}_1, \dfrac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial s}\rangle \\ h_{12} & = h_{21} = \langle \dfrac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \theta}, \boldsymbol{\nu}\rangle = -\langle \mathbf{b}_1, \dfrac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial \theta}\rangle = -\langle \mathbf{b}_2, \dfrac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial s}\rangle \\ h_{22} & = \langle \dfrac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \theta}, \boldsymbol{\nu}\rangle = -\langle \mathbf{b}_2, \dfrac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial \theta}\rangle \end{cases}$$

on a

$$\frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial s} = \frac{(1, s\cos(\theta), s\sin(\theta))}{(1+s^2)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial\theta} = \frac{(0, \sin(\theta), -\cos(\theta))}{\sqrt{1+s^2}}.$$

donc

$$h_{1,1} = -\langle \mathbf{b}_1, \frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial s}\rangle = \frac{-1}{1+s^2}, \qquad h_{2,2} = -\langle \mathbf{b}_2, \frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial \theta}\rangle = 1, \qquad h_{1,2} = -\langle \mathbf{b}_1, \frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial \theta}\rangle = 0.$$

La matrice de la seconde forme fondamentale est donc

$$\mathbf{H}(s,\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+s^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de Weingarten peut maintenant se calculer par la formule

$$\mathbf{L} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} = \frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans cet exemple il n'est pas difficile de calculer directement cette matrice : l'application de Weingarten $\mathbf{L}$ est la différentielle du vecteur normal, que l'on exprime dans la base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ du plan tangent à la caténoïde. Ici les calculs sont simples :

$$\mathbf{L}(\mathbf{b}_1) = \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial s} = \frac{1}{1+s^2}\mathbf{b}_1, \qquad \mathbf{L}(\mathbf{b}_2) = \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \theta} = -\frac{1}{1+s^2}\mathbf{b}_2.$$

Donc la matrice de L dans la base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ est

$$\mathbf{L} = \frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On obtient maintenant la courbure de Gauss et la courbure moyenne de la caténoïde.

$$K = \det(\mathbf{L}) = -\frac{1}{(1+s^2)^2}, \qquad H = -\frac{1}{2}\operatorname{Trace}(\mathbf{L}) = 0.$$

Remarques.

(i) On peut aussi calculer la courbure de Gauss directement à partir des matrices G et H par la formule $K = \dfrac{\det(H)}{\det(G)} = -\dfrac{1}{(1+s^2)^2}$.

(ii) La caténoïde est une surface de courbure moyenne nulle. Une telle surface s'appelle une *surface minimale.*

Exercice 13.2. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface de classe C^2 dont on note H et K les courbures moyenne et de Gauss respectivement. Montrer que les courbures principales sont données par

$$k_1, k_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Solution 13.2. C'est de l'algèbre élémentaire : De $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ et $K = k_1 k_2$ on déduit que $H^2 - K = \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2$. Supposons (quitte à échanger k_1 et k_2) que $k_1 \geq k_2$, alors on a

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(k_1 + k_2) = H, \\ \dfrac{1}{2}(k_1 - k_2) = \sqrt{H^2 - K}. \end{cases}$$

Donc $k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$ et $k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$.

Exercice 13.3. Montrer que la courbure de Gauss et la courbure moyenne peuvent s'écrire en fonction des coefficients (g_{ij}) et (h_{ij}) des deux formes fondamentales par

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \qquad \text{et} \qquad H = \frac{g_{11}h_{22} - 2\,g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}.$$

Solution 13.3. C'est du calcul matriciel : on a $\mathbf{L} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}$ avec

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}$$

La première identité est simplement la relation $K = \det(\mathbf{L}) = \dfrac{\det(\mathbf{H})}{\det(\mathbf{H})}$.

Pour la deuxième identité on calcule

$$\mathbf{L} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} -g_{22}h_{11} + g_{12}h_{12} & -g_{22}h_{12} + g_{12}h_{22} \\ g_{12}h_{11} - g_{11}h_{12} & g_{12}h_{12} - g_{11}h_{22} \end{pmatrix}$$

et donc

$$H = -\frac{1}{2}\mathrm{Trace}(L) = \frac{1}{2}\frac{g_{11}h_{22} - 2\,g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}}{g_{11}g_{22} - {g_{12}}^2}.$$

Exercice 13.4. Soit $\psi_1 : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière de classe C^2 et $\lambda > 0$. On note $\psi_2 = \lambda\psi_1 : \Omega \to \lambda S \subset \mathbb{R}^3$ la surface obtenue en appliquant une homothétie de rapport λ. Quelle est la relation entre la courbure de Gauss $K_1(u,v)$ en un point $p = \psi_1(u,v)$ de S et la courbure de Gauss $K_2(u,v)$ en un point $q = \lambda p = \psi_2(u,v)$ de λS ?

Solution 13.4. La courbure de toute courbe tracée sur la surface S est multipliée par $1/\lambda$ lors de l'homothétie de rapport λ. La courbure de Gauss est le produit des deux courbures principales, donc est multipliée par $1/\lambda^2$.

Exercice 13.5. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^3 birégulière. Prouver que si $\|\dot{\gamma}\|$ est constante, alors γ est une géodésique de la surface réglée S de paramétrisation $\psi(u,v) = \gamma(u) + v\mathbf{B}_\gamma(u)$, où $\mathbf{B}_\gamma(u)$ est le vecteur binormal de γ.

Solution 13.5. Par construction, le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ est (au signe près) le vecteur qui est orthogonal à $\dot{\gamma}$ et tangent à la surface. On a donc $\boldsymbol{\mu} = \pm\mathbf{B}$ pour la surface réglée S de l'exercice. En comparant les équations de Darboux et celles de Serret-Frenet on voit que la courbure géodésique k_g de γ est nulle. On conclut en remarquant qu'une courbe sur une surface est une géodésique si et seulement si elle est de vitesse constante et de courbure géodésique nulle.

Autre argument : Notons $S = \psi(I \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \subset \mathbb{R}^3$ la surface paramétrée par ψ (on prend $\epsilon > 0$ assez petit pour que la surface soit régulière). Notons $\boldsymbol{\nu} : S \to \mathbb{S}^2$ la co-rientation de la surface et $\mathbf{N}_\gamma$ le vecteur normal principal à γ. Il est clair qu'en tout $u \in I$, les vecteurs $\dot{\gamma}(u)$ et $\mathbf{B}_\gamma(u)$ forment une base de T_pS (avec $p = \gamma(u) = \psi(u,0)$). Par conséquent on a $\boldsymbol{\nu} = \pm\mathbf{N}_\gamma$ et donc

$$\ddot{\gamma}(u) = V^2\kappa_\gamma(u)\mathbf{N}_\gamma(u) = \pm V^2\kappa_\gamma(u)\boldsymbol{\nu}(\psi(u,0)),$$

où $V = \|\dot{\gamma}\|$. L'accélération est colinéaire au vecteur normal à la surface, ce qui signifie que γ est géodésique.

Exercice 13.6. Une courbe régulière γ de classe C^2 sur une surface S est une *ligne de courbure* si sa courbure normale est en tout point une courbure principale.
Montrer que γ est une ligne de courbure si et seulement si sa torsion géodésique est nulle.

Solution 13.6. La deuxième équation de Darboux dit que $\frac{1}{V}\dot{\boldsymbol{\nu}} = -k_n\mathbf{T} + \tau_g\boldsymbol{\mu}$. On a écrit $\boldsymbol{\nu}(t) = \boldsymbol{\nu}(\gamma(t))$ pour simplifier, donc en développant on a

$$V(-k_n\mathbf{T} + \tau_g\boldsymbol{\mu}) = \dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{d\boldsymbol{\nu}(\gamma(t))}{dt} = d\boldsymbol{\nu}(\dot{\gamma}(t)) = -L(\dot{\gamma}(t)).$$

On a donc $L(\dot{\gamma}(t)) = V(-k_n\mathbf{T} + \tau_g\boldsymbol{\mu}) = k_n\dot{\gamma} + V\tau_g\boldsymbol{\mu}$, ce qui signifie que $\dot{\gamma}(t)$ est un vecteur propre de l'application de Weingarten si et seulement si $\tau_g = 0$.

Exercice 13.7. Prouver que la courbure de Gauss d'une surface réglée S est ≤ 0 (pas besoin de faire de calculs).

Solution 13.7. Puisque la surface est réglée, il existe pour tout point $p \in S$ une segment de droite passant par p et contenu dans la surface. Notons $v \in T_pS$ la direction de cette droite, alors la courbure normale de S en p est nulle pour la direction v. Si on note $k_1(p)$ la plus petite courbure normale de S en p et $k_1(p)$ la plus grande courbure normale de S en p, alors on doit avoir $k_1(p) \leq 0 \leq k_2(p)$, et donc la courbure de Gauss $K(p) = k_1(p)k_2(p) \leq 0$.

Exercice 13.8. Prouver que la caténoïde et l'"hélicoïde sont localement isométriques.

Solution 13.8. Le tenseur métrique de l'hélicoïde dans les paramètres (u, v) s'écrit $\begin{pmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (voir exercice 12.3) et le tenseur métrique de la caténoïde dans les paramètres (s, θ) s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+s^2 \end{pmatrix}$ (voir exercice 13.1).
Le changement de paramètres $u = \theta, \;\; v = s$ définit donc une isométrie locale entre les deux surfaces .

Remarque. Le fait que la caténoïde et l'hélicoïde sont localement isométriques impliquent que ces deux surfaces ont la même courbure de Gauss, à cause du théorème egregium, ce que confirment les calculs.

Voici deux vidéos intéressantes illustrant l'isométrie entre la caténoïde et l'hélicoïde :
`https://www.youtube.com/watch?v=VRY42CogW0I`

et ici : `https://www.youtube.com/shorts/RYHxW8GTQgQ`

B. Exercice supplémentaire

Exercice 13.9. Montrer que la pseudo-sphère de Beltrami est intrinsèquement isométrique au demi-plan de Poincaré. Puis calculer son aire

Solution 13.9. La pseudo-sphère de Beltrami est la surface de révolution autour de l'axe Oz de profil $\gamma(v) = (r(v), z(v))$, où

$$r(v) = \mathrm{e}^{-v}, \qquad z(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2s}}ds.$$

On vérifie facilement que $\|\dot{\gamma}\| = 1$, donc le tenseur métrique est $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2v} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qu'on peut écrire $ds^2 = dv^2 + \mathrm{e}^{-2v}du^2$.

Rappelons maintenant que le demi-plan de Poincaré est le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ avec le tenseur métrique (métrique Riemannienne) $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

Si on pose $u = x$ et $v = \log(y)$, alors $\frac{1}{y^2} = \mathrm{e}^{-2v}$ et on a

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \mathrm{e}^{-2v} du^2 + dv^2,$$

donc le difféomorphisme $h := (x, y) \mapsto (u, v) = (x, \log(y))$ réalise une isométrie locale entre les deux métriques.

Si on préfère, on peut voir cela matriciellement :

$$Dh = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/y \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad Dh^\top \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2v} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Dh = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2v} & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer l'aire de la pseudo-sphère on peut choisir le domaine de paramétrisation $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 < v < \infty\}$. On a donc

$$\text{Aire} = \int_{v=0}^{\infty} \int_{u=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-v} dv du = 2\pi.$$

On peut aussi faire la calcul dans les coordonnées (x, y) :

$$\text{Aire} = \int_{y=1}^{\infty} \int_{x=0}^{2\pi} \frac{1}{y^2} dx dy = 2\pi,$$

(noter que $v > 0$ est équivalent à $y > 1$).

A noter : Sur Moodle, dans la rubrique "vidéos" il y a un lien vers une vidéo de K. Crane présentant un panorama assez complet de la courbure des courbes et des surfaces. Cette vidéo est de grande qualité mais aussi très dense, à regarder en petites tranches. Les première 55-60 minutes recouvrent des thèmes vus au cours, ensuite la vidéo illustre d'autres thèmes.

La vidéo se trouve aussi ici : `https://www.youtube.com/watch?v=e-erMrqBd1w`