EPFL - Automne 2024	M. Troyanov
MATH 213: Géométrie Différentielle	**Solution Exercices**
Série 12	6.12.2024

Objectifs. Cette série a pour but d'explorer la courbure des surfaces et les différentes notions qui apparaissent dans cette théorie; et comprendre comment calculer ces courbures.

A. Exercices standards.

Exercice 12.1. Prouver que si γ est une courbe birégulière de classe C^2 qui est géodésique d'une surface coorientée S, alors la torsion de γ (en tant que courbe dans $\mathbb{R}^3$) coïncide au signe près avec la torsion géodésique de cette courbe (ce résultat explique la terminologie de *torsion géodésique*).

La réciproque de cet énoncé est-elle valable (i.e. est-ce qu'une courbe sur une surface telle que la torsion géodésique est égale à la torsion est toujours une géodésique de cette surface) ?

Indication. Dans cet exercice il est utile de comparer les équations de Darboux et de Serret-Frenet pour la courbe γ.

Solution 12.1. Notons $\boldsymbol{\nu}$ la coorientation de la surface, et notons pour simplifier la restriction de ν à la courbe γ par $\boldsymbol{\nu}(t) = \boldsymbol{\nu}(\gamma(t))$. Écrivons les équations de Darboux et celles de Serret-Frenet pour la courbe γ :

$$\begin{cases} \frac{1}{V}\dot{\mathbf{T}} &= \;\; k_g\boldsymbol{\mu} + k_n\boldsymbol{\nu}, \\ \frac{1}{V}\dot{\boldsymbol{\nu}} &= -k_n\mathbf{T} + \tau_g\boldsymbol{\mu} \\ \frac{1}{V}\dot{\boldsymbol{\mu}} &= -k_g\mathbf{T} - \tau_g\boldsymbol{\nu} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \frac{1}{V}\dot{\mathbf{T}} &= \;\; \kappa\,\mathbf{N}, \\ \frac{1}{V}\dot{\mathbf{N}} &= -\,\kappa\,\mathbf{T} + \tau\,\mathbf{B}, \\ \frac{1}{V}\dot{\mathbf{B}} &= -\,\tau\,\mathbf{N}. \end{cases}$$

Si γ est géodésique, alors sa courbure géodésique k_g est nulle et la première équation implique que $\boldsymbol{\nu} = \pm\mathbf{N}_\gamma$ (le vecteur normal principal de γ), et quitte à changer le choix de la co-orientation (i.e. remplacer $\boldsymbol{\nu}$ par $-\boldsymbol{\nu}$), nous pouvons supposer que $\boldsymbol{\nu}(t) = \mathbf{N}_\gamma$.

Les équations ci-dessus impliquent alors que $\kappa = k_g$ et que $\boldsymbol{\mu} = \pm\mathbf{B}_\gamma$ (le vecteur binormal de γ), par conséquent $\tau = \pm\tau_g$.

La réciproque n'est pas valable. Par exemple si la surface S est un plan, alors la torsion de toute courbe birégulière γ tracée sur S est nulle. Le vecteur $\boldsymbol{\nu}$ normal à S est constant, donc la torsion géodésique de γ est également nulle (car $\tau_g(t) = \langle\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\mu}\rangle = 0$). Les deux torsions coïncident (elles sont nulles), pourtant γ n'est pas une géodésique (dans ce cas γ n'est même jamais une géodésique puisque la courbe doit être birégulière et les géodésiques d'un plan sont des droites).

Exercice 12.2. Calculer la courbure moyenne et la courbure de Gauss du cylindre circulaire droit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x^2 + y^2 = a^2$. (Peut-on prédire ces valeurs sans faire de calculs ?).

Solution 12.2. La courbure de Gauss est le produit des courbures principales et la courbure moyenne en est la demi-somme. On sait aussi que les directions principales (i.e. les directions des courbures principales) sont orthogonales.

Il est intuitivement clair que toutes les courbures normales d'un cylindre circulaire droit ont le même signe (négatif ou positif selon le choix de la co-orientaton). Par chaque point du cylindre il passe une droite, donc la courbure minimale (ou maximale) est nulle. L'autre courbure principale est celle de la direction orthogonale à la droite, c'est-à-dire la courbure du cercle de rayon a. Cette courbure est égale à $\pm\frac{1}{a}$ (le signe dépendant de l'orientation). Par conséquent la courbure de Gauss est $K = 0$ et la courbure moyenne est $H = \pm\frac{1}{2a}$.

Voyons l'approche analytique. Une paramétrisation du cylindre est $\psi(u,v) = (a\cos(u), a\sin(u), v)$ (avec $(u,v) \in \Omega = [0,2\pi] \times \mathbb{R}$). La base du plan tangent adaptée à cette paramétrisation est

$$\mathbf{b}_1(u,v) = \frac{\partial\psi}{\partial u} = (-a\sin(u), a\cos(u), 0), \qquad \mathbf{b}_2(u,v) = \frac{\partial\psi}{\partial v} = (0,0,1)$$

et

$$\boldsymbol{\nu}(u,v) = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|} = (\cos(u), \sin(u), 0).$$

On constate que $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ sont des vecteurs propres de l'application de Weingarten $\mathbf{L} = d\boldsymbol{\nu}$, en effet

$$\mathbf{L}(\mathbf{b}_1) = d\boldsymbol{\nu}(\mathbf{b}_1) = \frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial u_1} = (-\sin(u), \cos(u), 0) = \frac{1}{a} \cdot \mathbf{b}_1$$

et

$$\mathbf{L}(\mathbf{b}_2) = d\boldsymbol{\nu}(\mathbf{b}_2) = \frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial u_2} = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{b}_2$$

Donc dans la base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ du plan tangent $T_p\mathcal{C}$ (en un point quelconque du cylindre), la matrice de l'application de Weingarten est

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent la courbure de Gauss est $K = \det(\mathbf{L}) = 0$ et la courbure moyenne est

$$H = -\frac{1}{2}\mathrm{Trace}(\mathbf{L}) = -\frac{1}{2a}.$$

Remarquons qu'on aurait pu choisir l'autre signe pour la coorientation $\boldsymbol{\nu}$, dans ce cas on aurait obtenu $H = \frac{1}{2a}$.

Exercice 12.3. (a) Calculer le tenseur métrique, la deuxième forme fondamentale et l'application de Weingarten de l'hélicoïde

$$\psi(u,v) = (v\cos(u), v\sin(u), u).$$

(b) Que valent la courbure moyenne et la courbure de Gauss de cette surface ?

Solution 12.3. (a) Le repère adapté à notre paramétrisation est donné par

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 &= \dfrac{\partial\psi}{\partial u} = (-v\sin(u), v\cos(u), 1) \\ \mathbf{b}_2 &= \dfrac{\partial\psi}{\partial v} = (\cos(u), \sin(u), 0) \\ \boldsymbol{\nu} &= \dfrac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|} = \dfrac{(-\sin(u), \cos(u), -v)}{\sqrt{1+v^2}}. \end{cases}$$

La matrice du tenseur métrique est donc

$$\mathbf{G}(u,v) = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer les coefficients de la deuxième forme fondamentale, on calcule d'abord

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} = -v(\cos(u), \sin(u), 0), \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial u \partial v} = (-\sin(u), \cos(u), 0), \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = (0,0,0).$$

On a donc

$$h_{11} = \langle \tfrac{\partial^2\psi}{\partial u^2}, \boldsymbol{\nu} \rangle = 0, \qquad h_{22} = \langle \tfrac{\partial^2\psi}{\partial v^2}, \boldsymbol{\nu} \rangle = 0, \qquad h_{12} = h_{21} = \langle \tfrac{\partial^2\psi}{\partial u \partial v}, \boldsymbol{\nu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Qu'on écrit matriciellement

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de l'application de Weingarten est alors

$$\mathbf{L} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & -\left(v^2+1\right)^{-3/2} \\ -\frac{1}{\sqrt{v^2+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) La courbure de Gauss est

$$K = \det(\mathbf{L}) = \frac{\det(\mathbf{H})}{\det(\mathbf{G})} = -\frac{1}{(1+v^2)^2}.$$

La courbure moyenne est

$$H = -\frac{1}{2}\mathrm{Trace}(\mathbf{L}) = 0.$$

Exercice 12.4. Montrer que la matrice de la seconde forme fondamentale du graphe de la fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, de classe C^2 (où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^2$) est

$$H = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}} \begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} \end{pmatrix}$$

Solution 12.4. Le graphe de la fonction (de deux variables) φ est la surface d'équation $z = \varphi(x,y)$, un paramétrage de cette surface est donné par $\psi(x,y) = (x, y, \varphi(x,y))$. Nous utiliserons pour simplifier les notations suivantes pour les dérivées partielles

$$\varphi_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \varphi_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \varphi_{xx} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\ \varphi_{yy} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \quad \varphi_{xy} = \varphi_{yx} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}.$$

Rappelons que la deuxième forme fondamentale est la forme bilinéaire symétrique dont la matrice $H = (h_{ij})$ dans la base adaptée $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ de T_pS est donnée par

$$h_{ij} = h(b_i, b_j) = \langle \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j}, \boldsymbol{\nu} \rangle = \langle \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial x_j}, \boldsymbol{\nu} \rangle$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est le champ de vecteurs normal à la surface. On a

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x} = (1, 0, \varphi_x) \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial\psi}{\partial y} = (0, 1, \varphi_y),$$

donc

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|} = \frac{(-\varphi_x, -\varphi_y, 1)}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}.$$

On calcule facilement que

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = (0,0,\varphi_{xx}), \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = (0,0,\varphi_{xy}), \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = (0,0,\varphi_{yy}), \tag{1}$$

par conséquent

$$h_{11} = \langle\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \boldsymbol{\nu}\rangle = \frac{\langle(0,0,\varphi_{xx}),(-\varphi_x,\varphi_y,1)\rangle}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}} = \frac{\varphi_{xx}}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}},$$

et de même

$$h_{12} = \frac{\varphi_{xy}}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}, \quad h_{22} = \frac{\varphi_{yy}}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}.$$

Exercice 12.5. Est-ce que la matrice de l'application de Weingarten d'une surface est toujours une matrice symétrique ?

Solution 12.5. L'application de Weingarten est un endomorphisme autoadjoint $L_p : T_pS \to T_pS$ du plan tangent à une surface. Sa matrice dépend du choix d'une base de T_pS, si cette base est orthonormée alors la matrice de L_p est en effet symétrique, mais ça n'est pas le cas en général. L'exemple de l'hélicoïde montre que en effet la matrice de L_p peut être non symétrique.

Exercice 12.6. Soit p un point non ombilique d'une surface régulière de classe C^2. On note $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ les vecteurs unités de T_pS dans les direction principales. Prouver la *formule d'Euler*, qui dit que la courbure normale du vecteur $\mathbf{v}_\theta = \cos(\theta)\mathbf{v}_1 + \sin(\theta)\mathbf{v}_2 \in T_pS$ est donnée par

$$k_n(\mathbf{v}_\theta) = k_1\cos(\theta)^2 + k_2\sin(\theta)^2,$$

où k_1, k_2 sont les courbures principales de S en p.
En déduire que k_1 et k_2 sont les valeurs minimale et maximale de la courbure normale de S au point p.
(On rappelle qu'un point de la surface S est dit *ombilique* si les deux courbures principales en ce point coïncident : $k_1 = k_2$).

Solution 12.6. Les directions principales en un point non ombilique de la surface S sont les directions des vecteurs propres de l'application de Weingarten L_p. Comme L_p est autoadjointe, ces directions sont orthogonales. Donc $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ est une base orthonormée de T_pS.

Le vecteur $\mathbf{v}_\theta$ est de norme 1, donc on a d'une part

$$\begin{aligned} k_n(\mathbf{v}_\theta) &= \frac{h(\mathbf{v}_\theta,\mathbf{v}_\theta)}{\|\mathbf{v}_\theta\|^2} = h(\mathbf{v}_\theta,\mathbf{v}_\theta) \\ &= h\left(\cos(\theta)\mathbf{v}_1 + \sin(\theta)\mathbf{v}_2, \cos(\theta)\mathbf{v}_1 + \sin(\theta)\mathbf{v}_2\right) \\ &= \cos(\theta)^2 h(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1) + 2\sin(\theta)\cos(\theta)h(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) + \sin(\theta)^2 h(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

D'autre part

$$h(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j) = -\langle\mathbf{L}(\mathbf{v}_i),\mathbf{v}_j\rangle = \langle k_i\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle = k_i\delta_{ij}$$

et donc

$$k_n(\mathbf{v}_\theta) = k_1\cos(\theta)^2 + k_2\sin(\theta)^2.$$

B. Exercice supplémentaire (sur les géodésiques des surfaces de révolution).

Exercice 12.7. Le but est de cet exercice est de déterminer toutes les géodésiques des surfaces de révolution. On considère la surface de révolution $\psi : \Omega = [0, 2\pi] \times I \to S \subset \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\psi(\theta, s) = (r(s)\cos(\theta), r(s)\sin(\theta), z(s))$$

(a) On considère une courbe $\gamma(t)$ $(t \in J)$, de classe C^2 tracée sur la surface S. Montrer que pour tout $t \in J$ on a

$$\langle \ddot{\gamma}(t), \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rangle = \frac{d}{dt}\left(r^2 \dot{\theta}(t) \right),$$

où le point signifie la dérivée par rapport au paramètre t.

(b) Montrer que si $\gamma(t)$ est une géodésique, alors les quantités

$$r^2(t)\dot{\theta}(t) \qquad \text{et} \qquad (r(t)\dot{\theta}(t))^2 + \dot{r}(t)^2 + \dot{z}(t)^2$$

sont constantes (indépendante de t).

(c) Montrer que la fonction $t \mapsto 1/r(t)$ est bornée pour toute géodésique qui n'est pas un méridien de la surface de révolution.

(d) Montrer que la hauteur de toute géodésique dans la pseudo-sphère qui n'est pas un méridien est une courbe bornée dans $\mathbb{R}^3$.

Indication pour (c). On peut calculer la vitesse et l'accélération de γ en coordonnées cylindriques.

Solution 12.7. (a) La courbe γ peut s'écrire

$$\gamma(t) = \psi(\theta(t), s(t)) = (r(s(t))\cos(\theta(t)), r(s(t))\sin(\theta(t)), z(s(t))).$$

Dans la suite de l'exercice, on écrit pour simplifier $r(t)$ pour $r(s(t))$ et $z(t)$ pour $z(s(t))$, notons toutefois que $\dot{r} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}$ et $\dot{z} = \frac{dz}{ds}\frac{ds}{dt}$. On a alors

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\gamma = \dot{r} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + r\dot{\theta} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{z} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En dérivant une seconde fois, on a

$$\ddot{\gamma} = \frac{d^2}{dt^2}\gamma = \ddot{r} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} - r\dot{\theta}^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + \ddot{z} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \mathbf{b}_1 = r \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

et donc

$$\langle \ddot{\gamma}(t), \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rangle = r \cdot (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = \frac{d}{dt}\left(r^2 \dot{\theta} \right).$$

(b) Si γ est géodésique, alors par le point (a)

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \dot{\theta} \right) = \langle \ddot{\gamma}(t), \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rangle = 0,$$

donc $r^2\dot\theta$ est constante. D'autre part, on sait que la vitesse de γ est constante, par conséquent

$$\|\dot\gamma(t)\|^2 = \dot r(t)^2 + (r(t)\dot\theta(t))^2 + \dot z(t)^2 \ = \ \text{constante}$$

(le vecteur $\dot\gamma(t)$ est calculé plus haut).

(c) Le résultat en (b) nous dit que pour toute géodésique sur la surface de révolution S il existe des constantes a et b telles que

$$r^2\dot\theta = a \qquad \text{et} \quad (r\dot\theta)^2 + \dot r^2 + \dot z^2 = b.$$

Notons pour la suite que $b > 0$. On a donc

$$\frac{a^2}{r^2} = (r\dot\theta)^2 = b - \dot r^2 - \dot z^2 \leq b.$$

Deux cas se présentent. Si $\dot\theta$ s'annule en un point, alors $a = 0$ et $\dot\theta$ s'annule en tout point. Donc θ est constante et la courbe est un méridien de la surface de révolution. Sinon, $a \neq 0$ (et $\dot\theta$ ne s'annule pas) et donc $1/r(t) \leq b/\sqrt{|a|}$ est bien une fonction bornée.

(d) Si $\gamma(t)$ est une géodésique de la pseudo-sphère qui n'est pas bornée, alors elle doit s'approcher arbitrairement de l'axe de rotation, donc $r(t) \to 0$ (pour $t \to \infty$) et par le point (c) on en déduit que γ doit être un méridien.

Remarque. Le résultat qui dit que pour les géodésiques qui ne sont pas des méridiens sur les surfaces de révolutions la quantité $r^2(t)\dot\theta(t)$ est constante s'appelle le *théorème de Clairault* . Une quantité qui est constante sur les solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires s'appelle parfois une *intégrale première* de ce système. Donc $r^2(t)\dot\theta(t)$ est une intégrale première de l'équation des géodésiques sur une surface de révolution. Ce phénomène est lié à l'existence d'un groupe de symétries (la surface est par construction invariante par rotation autour de l'axe). Lorsque on connaît un nombre suffisant d'intégrales premières, on peut complètement résoudre un système différentiel et on dit que le système est *totalement intégrable.* Le point (b) de l'exercice nous dit que c'est le cas ici.