

Objectifs pour cette semaine : Le premier exercice relie le volume d'un parallélépipède à la matrice de Gram. Les autres exercices portent sur des notions de géométrie intrinsèque des surfaces.

Exercice 10.1. Expliquer pourquoi le volume du parallélépipède $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^m$ construit sur les vecteurs $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^m$ vérifie

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = \sqrt{\det(\mathbf{G})},$$

où \mathbf{G} , est la matrice de Gram de $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ (c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les produits scalaires $g_{ij} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle$).

Solution 10.1. Dans le cas du plan, i.e. lorsque $m = 2$, on a vu au chapitre 1 que

$$\text{Aire}(\mathcal{P}) = \sqrt{\|\mathbf{b}_1\|^2 \|\mathbf{b}_2\|^2 - \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle^2}.$$

Dans le cas général, on sait que le volume orienté du parallélépipède \mathcal{P} est le déterminant de la matrice \mathbf{B} dont les colonnes sont les composantes des vecteurs \mathbf{b}_i dans la base canonique (ou dans n'importe quelle base orthonormée directe) :

$$\text{Vol}_{\text{or}}(\mathcal{P}) = \det(\mathbf{B}), \quad \mathbf{B} = (b_{ij}) \quad \text{où} \quad \mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} \mathbf{e}_i.$$

D'autre part on a $\mathbf{G} = \mathbf{B}^\top \mathbf{B}$, par conséquent

$$\det(\mathbf{G}) = \det(\mathbf{B}^\top \mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}^\top) \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})^2 = \text{Vol}(\mathcal{P})^2.$$

Exercice 10.2. (a) Donner un domaine ouvert maximal sur lequel les coordonnées polaires définissent un difféomorphisme $\psi : (r, \theta) \rightarrow (x, y)$.

(b) Calculer le tenseur métrique associé.

(c) En déduire la formule pour calculer l'aire d'un domaine en coordonnées polaires.

Solution 10.2. (a) L'application $\psi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ définit un difféomorphisme entre

$$\Omega = \{(r, \theta) \mid r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$$

et

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \text{ ou } x > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$$

(on fait une "coupe" dans le plan en lui enlevant une demi-droite issue de l'origine, on pourrait choisir une autre demi-droite; cette procédure est aussi utilisée pour définir les déterminations de la fonction complexe $\log(z)$).

(b) On calcule $\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial r} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $\mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = (-r \sin(\theta), r \cos(\theta))$. Alors

$$g_{11} = \|\mathbf{b}_1\|^2 = 1, \quad g_{12} = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle = 0, \quad g_{22} = \|\mathbf{b}_2\|^2 = r^2.$$

Le tenseur métrique est donc $\mathbf{G}(r, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$.

Remarque. On peut aussi le calculer rapidement ainsi : on a $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, donc

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (\cos(\theta)dr - r \sin(\theta)d\theta)^2 + (\sin(\theta)dr + r \cos(\theta)d\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

(c) L'aire d'un domaine D du plan se calcule donc en coordonnées polaires par

$$\text{Aire}(D) = \iint_{D'} \sqrt{\det G} dr d\theta = \iint_{D'} r dr d\theta,$$

où $D' = \psi^{-1}(D)$ est la représentation du domaine D dans les coordonnées polaires (i.e. $(r, \theta) \in D'$ correspond à $(x, y) \in D$).

Exercice 10.3. Considérons l'hélicoïde définie par

$$S = \{(x, yz) \in \mathbb{R}^3 \mid x \sin(z) - y \cos(z) = 0\}$$

(a) Prouver que l'hélicoïde est une surface réglée et décrire la géométrie de cette surface.

(b) Montrer que l'application

$$\psi(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), u)$$

défini un difféomorphisme (global) entre \mathbb{R}^2 et S .

(c) Calculer ensuite le tenseur métrique associé à ce paramétrage.

Solution 10.3. (a) On montre d'abord que $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface régulière, c'est-à-dire une sous-variété différentiable. La surface est définie par $S = f^{-1}(0)$ où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de classe C^∞ définie par $f(x, y, z) = x \sin(z) - y \cos(z)$. Cette fonction est de rang constant = 1 (c'est une submersion) car son gradient

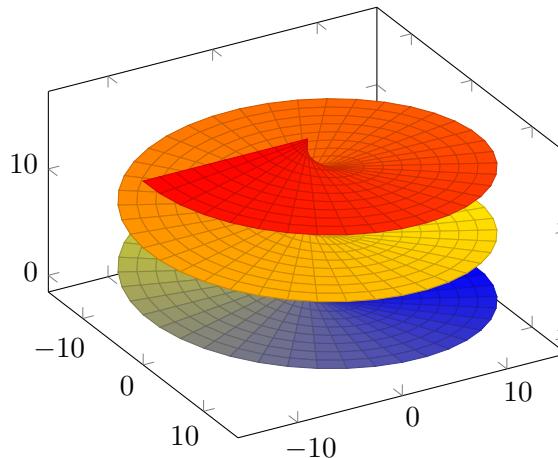
$$\nabla f = (\sin(z), -\cos(z), x \cos(z) + y \sin(z))$$

ne s'annule en aucun point de \mathbb{R}^3 . On conclut par le théorème 3.15 (A) du cours que S est une sous-variété de dimension 2 de \mathbb{R}^3 .

Rappelons maintenant qu'une surface est dite *régulée* si chaque point appartient à une droite ou un segment de droite entièrement contenu dans la surface. Pour chaque valeur fixe de $c \in \mathbb{R}$, les équations

$$z = c, \quad x \sin(c) - y \cos(c) = 0$$

représentent une droite de \mathbb{R}^3 (comme l'intersection de deux plans), et cette droite est clairement contenue dans l'hélicoïde. L'hélicoïde est ainsi engendré par une droite horizontale qui tourne à vitesse constante en se déplaçant le long de l'axe Oz .



(b) Nous devons montrer les points suivants :

- (b1) $\psi(u, v) \in S$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
- (b2) ψ est de classe C^k avec $k \geq 1$ et c'est une immersion (le rang de ψ est égal à $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$).
- (b3) ψ est bijectif et son inverse est différentiable.

(b1) Pour montrer que $\psi(u, v) \in S$, il suffit de constater que $\psi(u, v)$ vérifie l'équation de l'hélicoïde $x \sin(z) = y \cos(z)$. C'est un calcul élémentaire : on a $x(u, v) = v \cos(u)$, $y(u, v) = v \sin(u)$, $z(u, v) = u$, et donc

$$x \sin(z) = v \cos(u) \sin(u) = y \cos(z).$$

Ainsi $\psi(u, v) \in S$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(b2) L'application ψ est clairement de classe C^∞ , et sa matrice jacobienne est

$$D\psi(u, v) = \begin{pmatrix} -v \sin u & \cos(u) \\ v \cos u & \sin(u) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 2 pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(b3) Les points (b1) et (b2) montrent que ψ représente *localement* une paramétrisation de l'hélicoïde. Pour montrer que ψ est *globalement* un différomorphisme du plan \mathbb{R}^2 vers la surface S nous allons construire un inverse différentiable φ de ψ .

Pour cela définissons d'abord deux domaines de \mathbb{R}^3 par

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \cos(z) \neq 0\} \quad \text{et} \quad U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sin(z) \neq 0\},$$

puis on définit les applications $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi_1(x, y, z) = \left(z, \frac{x}{\cos(z)} \right) \quad \text{et} \quad \varphi_2(x, y, z) = \left(z, \frac{y}{\sin(z)} \right).$$

Il est clair que φ_1 et φ_2 sont différentiables de classe C^∞ . De plus φ_1 et φ_2 coïncident sur les points de S :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{sur} \quad S \cap U_1 \cap U_2,$$

car pour tout point de $S \cap U_1 \cap U_2$, on a

$$\frac{x}{\cos(z)} = \frac{y}{\sin(z)}.$$

On peut donc définir $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} \varphi_1(x, y, z) & \text{si } \cos(z) \neq 0, \\ \varphi_2(x, y, z) & \text{si } \sin(z) \neq 0. \end{cases}$$

Cette formule ne définit pas une application de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^2 , mais sa restriction à la surface S est bien définie car pour tous les points $(x, y, z) \in S$ tels que $\sin(z) \neq 0$ et $\cos(z) \neq 0$ on a

$$\frac{x}{\cos(z)} = \frac{y}{\sin(z)}$$

(à cause de la condition $x \sin(z) = y \cos(z) = 0$). L'application $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ est différentiable, de classe C^∞ car au voisinage de chaque point de S on peut l'étendre en une application différentiable définie sur un ouvert de \mathbb{R}^3 .

(c) Le repère adapté à ce paramétrage est donné par

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -v \sin u \\ v \cos u \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le tenseur métrique associé est alors donné par

$$\mathbf{G}(u, v) = \begin{pmatrix} \|\mathbf{b}_1\|^2 & \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle & \|\mathbf{b}_2\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque. La réponse au point (b) donne une autre preuve que S est une surface réglée, car

$$\psi(u, v) = (0, 0, u) + v(\cos u, \sin u, 0) = (v \cos u, v \sin u, u)$$

est une famille de droites (paramétrée par u).

Exercice 10.4. Prouver que l'aire d'une surface paramétrée régulière $\psi : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^1 peut se calculer par la formule

$$\text{Aire}(S) = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial v} \right\| du dv$$

Solution 10.4. On rappelle l'identité de Lagrange (exercice 1.2) pour les vecteurs de \mathbb{R}^3 , elle dit que $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$. En particulier on a

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2$$

Avec les notations habituelles de la théorie des surfaces, on a donc,

$$\left\| \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial v} \right\| = \|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\| = \sqrt{\|\mathbf{b}_1\|^2 \|\mathbf{b}_2\|^2 - \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle^2} = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2},$$

ainsi

$$\iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial v} \right\| du dv = \iint_{\Omega} \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} du dv = \text{Aire}(S).$$

Exercice 10.5. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et notons S la surface de révolution dans \mathbb{R}^3 obtenue par rotation du graphe de f autour de l'axe Ox . Prouver soigneusement que

$$\text{Aire}(S) = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot |f(x)| dx.$$

Solution 10.5. On paramétrise la surface de révolution par

$$\psi(x, \theta) = (x, \cos(\theta)f(x), \sin(\theta)f(x))$$

(l'axe de rotation est l'axe Ox). Le plan tangent en un point quelconque est donné par

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} = (1, \cos(\theta)f'(x), \sin(\theta)f'(x)), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = (0, -\sin(\theta)f(x), \cos(\theta)f(x))$$

ce qui donne le tenseur métrique

$$g_{11} = 1 + f'(x)^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = f^2(x).$$

On a donc l'élément d'aire

$$dA = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dx d\theta = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot |f(x)| dx d\theta,$$

et le domaine de paramétrisation est $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a \leq x \leq b$. Ainsi

$$\text{Aire}(S) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{x=a}^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot |f(x)| dx d\theta = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot |f(x)| dx.$$

Exercice 10.6. La *chaînette* est le graphe du cosinus hyperbolique, c'est-à-dire la courbe $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$.

- (a) Expliquer pourquoi cette courbe s'appelle ainsi (une petite recherche sur internet n'est pas interdite).
- (b) Montrer que la courbure de α est donnée par $\kappa(t) = 1/\cosh(t)^2$.
- (c) Calculer la développée de α .
- (d) Calculer l'abscisse curviligne de la chaînette depuis le point initial $\alpha(0) = (0, 1)$, puis donner la paramétrisation naturelle de α .
- (e) La surface de révolution de la chaînette autour de l'axe Ox s'appelle une *caténoïde*. Calculer le tenseur métrique de la caténoïde (en préférant la paramétrisation naturelle de la chaînette).

Solution 10.6. (a) On peut prouver rigoureusement que la forme idéale que prend une chaîne ou un cable suspendu est décrite par l'équation $y(x) = \frac{1}{a}(\cosh(x) - 1)$, où a est une constante physique ($a = \frac{g\rho}{T}$ avec ρ = densité linéaire de masse du cable ou de la chaîne, T est la tension et g la valeur du champ de gravitation). L'argument est de nature statique (équilibre des forces) et ne prend que quelques lignes de développement.

- (b) Presque immédiat à partir de la formule $k = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$ et de la paramétrisation $(x(t), y(t)) = (t, \cosh(t))$.

(c) Rappelons que la développée d'une courbe birégulière α est la courbe $\beta(t) = \alpha(t) + \rho(t)\mathbf{N}_\alpha(t)$. On a

$$\rho(t) = 1/k(t) = \cosh^2(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = \frac{(-\sinh(t), 1)}{\cosh(t)}.$$

Donc

$$\beta(t) = (t, \cosh(t)) + \cosh(t)(-\sinh(t), 1) = (t - \cosh(t)\sinh(t), 2\cosh(t)).$$

- (d) La vitesse est $V_\alpha(t) = \cosh(t)$ (vous l'avez déjà calculée pour la question précédente). Donc $s(t) = \int_0^t \cosh(\tau)d\tau = \sinh(t)$, et la paramétrisation naturelle de la chaînette est

$$s \mapsto \left(\sinh^{-1}(s), \sqrt{1+s^2} \right) = \left(\log(s + \sqrt{1+s^2}), \sqrt{1+s^2} \right).$$

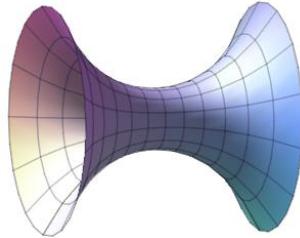
- (e) Paramétrisons maintenant la caténoïde comme surface de révolution autour de l'axe Ox en partant du paramétrage naturel de la chaînette comme profil. Cela nous donne

$$\psi(s, \theta) = \left(\log(s + \sqrt{1+s^2}), \sqrt{1+s^2} \cos(\theta), \sqrt{1+s^2} \sin(\theta) \right).$$

Le tenseur métrique est

$$G(s, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+s^2 \end{pmatrix}$$

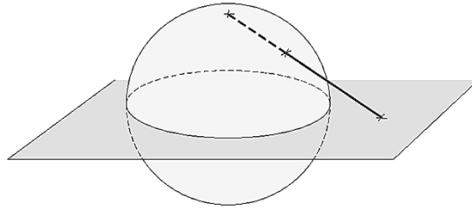
Remarque: On peut prouver que la surface d'aire minimale dont le bord est la réunion de deux cercles parallèles dans \mathbb{R}^3 est la caténoïde s'appuyant sur ces deux cercles.



Exercice 10.7. Soit $S_a \subset \mathbb{R}^3$ la sphère de rayon $a > 0$ centrée en l'origine. On appelle *projection stéréographique* l'application

$$\pi : S_a \setminus \{(0, 0, a)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

qui envoie un point $p = (x, y, z) \in S_a$ ($p \neq (0, 0, a)$) sur l'unique point q du plan \mathbb{R}^2 tel que les trois points $(0, 0, a)$, p et q sont alignés (on regarde \mathbb{R}^2 comme un plan dans \mathbb{R}^3 .)



Notons $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_a$ l'application inverse de la projection stéréographique.

- (a) Trouver une formule explicite pour ψ et montrer que ψ est un paramétrage régulier de $S_a \setminus \{(0, 0, a)\}$.
- (b) Calculer le tenseur métrique associé à cette paramétrisation.
- (c) Cette paramétrisation est-elle conforme ?
- (d) Prouver que la projection stéréographique définit un homéomorphisme entre la sphère et le compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R}^2 .
(Le *compactifié d'Alexandrov* de \mathbb{R}^2 est l'ensemble $\widehat{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ muni de la topologie pour laquelle tout voisinage d'un point q de \mathbb{R}^2 est aussi un voisinage de q dans $\widehat{\mathbb{R}^2}$ et les complémentaires des parties compactes de \mathbb{R}^2 forment une base de voisinage du point ∞).

Remarque. Parfois on définit la projection stéréographique en projetant sur un autre plan que le plan de l'équateur, en particulier on projette souvent sur la plan tangent au "pôle sud" $(0, 0, -a)$.

Solution 10.7. (a) Il faut être bien organisé dans les calculs; notons $\psi(u, v) = (x, y, z)$ le point de la sphère S_a aligné sur $(u, v, 0)$ et $(0, 0, a)$. Comme la projection stéréographique est une application

équivariante par rapport à toute rotation autour de l'axe Oz , il sera commode de noter $r = |(u, v)| = \sqrt{u^2 + v^2}$ et $\rho = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Par les théorèmes de Thalès et Pythagore on a

$$\frac{r}{a} = \frac{\rho}{a - z}, \quad z^2 + \rho^2 = a^2.$$

Donc

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{\rho^2}{(a - z)^2} = \frac{a^2 - z^2}{(a - z)^2} = \frac{a + z}{a - z}.$$

En résolvant par rapport à z , on trouve

$$z = z(u, v) = a \cdot \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2} = a \cdot \frac{u^2 + v^2 - a^2}{u^2 + v^2 + a^2}.$$

On a donc

$$\rho = \frac{(a - z)r}{a} = \frac{2a^2r}{u^2 + v^2 + a^2},$$

et donc

$$x(u, v) = \frac{\rho u}{r} = \frac{2a^2u}{u^2 + v^2 + a^2}, \quad y(u, v) = \frac{\rho v}{r} = \frac{2a^2v}{u^2 + v^2 + a^2}.$$

La paramétrisation cherchée s'écrit donc

$$\psi(u, v) = \lambda(u, v) (2a^2u, 2a^2v, a(u^2 + v^2 - a^2)), \quad \text{avec} \quad \lambda(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2 + a^2}.$$

Il peut être utile et rassurant de vérifier qu'on a bien $\|\psi(u, v)\| = a$ (i.e. $\psi(u, v)$ appartient à la sphère S_a). Le point suivant nous confirmera que la paramétrisation ψ est régulière.

(b) Pour calculer le tenseur métrique, il est utile de noter que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = -2\lambda^2u, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = -2\lambda^2v.$$

On a (après quelques calculs)

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial u} = 2a^2\lambda^2 ((a^2 - u^2 + v^2), -2uv, 2au) \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{\partial \psi}{\partial v} = 2a^2\lambda^2 (-2uv, (a^2 + u^2 - v^2), 2av). \end{cases}$$

on voit facilement que $g_{12} = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle = 0$. On a aussi

$$g_{11} = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle = 4a^4\lambda^4 ((a^2 - u^2 + v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4a^2u^2) = 4a^4\lambda^2$$

et de même $g_{22} = 4a^4\lambda^2$. Ainsi le tenseur métrique est

$$G(u, v) = 4a^4\lambda(u, v)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que l'on écrit souvent sous la forme

$$ds^2 = \frac{4a^4(du^2 + dv^2)}{(a^2 + u^2 + v^2)^2}.$$

(Les calculs confirment que les champs \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 sont linéairement indépendants et donc la paramétrisation est régulière).

(c) Le calcul précédent montre en effet que la projection stéréographique est conforme. Sur une carte stéréographique les angles sont préservés.

(d) Au vu de la définition du compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R}^2 , il suffit de vérifier que $\lim_{(u,v) \rightarrow \infty} \psi(u, v) = (0, 0, a)$. Or c'est évident géométriquement et est confirmé par les formules obtenues précédemment.
