Série 16

Exercice 1

Le but de cet exercice est de compléter et d'utiliser un programme permettant d'approcher la solution d'un problème de convection-diffusion à une dimension d'espace.
Soient c_0 et ϵ deux constantes positives données ; soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]\times[0,+\infty)$. Nous cherchons une fonction $u : (x,t) \in]0,1[\times[0,+\infty) \to u(x,t) \in \mathbb{R}$ telle que

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \epsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + c_0\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(x,t), & \forall\, x \in]0,1[,\ \forall\, t>0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall\, t>0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & \forall\, x \in [0,1]. \end{cases}$$

Soient N un entier positif, $h = 1/(N+1)$ et notons $x_i = ih$, $i = 0,1,...,N+1$. Soient $\tau > 0$ un pas de temps donné, $t_n = n\tau$ avec $n = 0,1,2,\ldots$, et u_i^n une approximation de $u(x_i,t_n)$, $i = 1,...,N$, $n = 0,1,2,\ldots$ On écrit l'équation de diffusion convection au point x_i et au temps t^{n+1}, on utilise une formule de différences finies centrée pour approcher $\partial^2 u/\partial x^2$, une formule de différences finies décentrée pour approcher $\partial u/\partial x$ ainsi qu'une formule de différence finie rétrograde pour approcher $\partial u/\partial t$.

1.a) Ecrire le schéma correspondant à $(\mathcal{P})$. **Spécifier le domaine de validité des indices, préciser les conditions aux limites et la condition initiale.** Soient $\vec{w}$, $\vec{f}(t_n)$ et $\vec{u}^n$ les N-vecteurs définis par

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \sin(\pi x_1) \\ \vdots \\ sin(\pi x_N) \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}(t_n) = \begin{pmatrix} f(x_1,t_n) \\ \vdots \\ f(x_N,t_n) \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}.$$

Ecrire le schéma sous la forme :

$$A\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n + \tau\vec{f}(t_{n+1}), \qquad n = 0,1,2,...,. \tag{1}$$

Expliciter la matrice A.

1.b) On utilise une méthode de décomposition LU pour résoudre (1). Compléter le fichier `convdiff.m`. A partir de la donnée de f, N, τ, ϵ, c_0 et M, ce fichier fournit une approximation de $u(x_1,t_M)$, …, $u(x_N,t_M)$. On suppose que $\vec{a}$ est le N-vecteur contenant la diagonale de la matrice A, $\vec{c}$ le (N-1)-vecteur représentant la sur-diagonale de la matrice A et $\vec{d}$ le (N-1)-vecteur représentant la sous-diagonale de la matrice A .

1.c) On pose $f(x,t) = 10\pi e^{-\pi^2 t}\cos(\pi x)$, $c_0 = 10$ et $\epsilon = 1$. Vérifier que la solution du problème $(\mathcal{P})$ est donnée par $u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$. Vérifier que la méthode est d'ordre $h+\tau$. Pour ce faire, tapez successivement `convdiff(9,10,0.02)` , `convdiff(19,20,0.01)`, `convdiff(39,40,0.005)`, `convdiff(79,80,0.0025)` etc. Implémentez un calcul de l'erreur, comme le maximum de la valeur absolue de l'erreur par exemple. (voir séries précèdentes) Notez que l'erreur est approximativement divisée par deux à chaque fois.

1.d) On suppose $f(x,t) = 0$. Montrer que si $u_i^n \geqslant 0$, $i = 0,\ldots,N+1$ alors $u_i^{n+1} \geqslant 0$, $i = 0,\ldots,N+1$.

Exercice 2

On considère le problème suivant : étant $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x_i = -1 + \frac{2i}{m+1}$, $i = 1,\ldots,m$, trouver $\vec{a}^*, \vec{\omega}^*, \vec{b}^* \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$F(\vec{a}^*, \vec{\omega}^*, \vec{b}^*) \leqslant F(\vec{a}, \vec{\omega}, \vec{b}) \quad \forall \vec{a}, \vec{\omega}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

où

$$F(\vec{a}, \vec{\omega}, \vec{b}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\,\mathrm{relu}(\omega_j x_i + b_j) - f(x_i)\right)^2,$$

et $\mathrm{relu}(x) = \max(0, x)$.
La solution de (1) satisfait, pour $k = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial a_k}(\vec{a}^*, \vec{\omega}^*, \vec{b}^*) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \omega_k}(\vec{a}^*, \vec{\omega}^*, \vec{b}^*) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b_k}(\vec{a}^*, \vec{\omega}^*, \vec{b}^*) = 0 \tag{2}$$

1.a)
Vérifier que $\forall \vec{a}, \vec{\omega}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial a_k}(\vec{a}, \vec{\omega}, \vec{b}) &= \left(A^T(A\vec{a} - \vec{f})\right)_k, \\
\frac{\partial F}{\partial \omega_k}(\vec{a}, \vec{\omega}, \vec{b}) &= \left(W^T(A\vec{a} - \vec{f})\right)_k, \\
\frac{\partial F}{\partial b_k}(\vec{a}, \vec{\omega}, \vec{b}) &= \left(B^T(A\vec{a} - \vec{f})\right)_k,
\end{aligned}$$

où les matrices $A, W, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et le vecteur $\vec{f} \in \mathbb{R}^m$ sont à définir.
1.b)
Le programme `twolayersnorm.m` (ou le notebook Jupyter `twolayersnorm.ipynb`) approche la solution de (2) avec la méthode du gradient avec un pas $\eta > 0$. Complétez-le. Vérifiez les résultats après 10 000 itérations lorsque $n = 100$, $m = 20$ et $\eta = 1$.