Série 15

Exercice 1

On considère le problème 2 du cours. Il s'agit de trouver $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{q}^* \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\begin{pmatrix} A & -I \\ M^{oT}M^o & \alpha A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}^* \\ \vec{q}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ M^{oT}M^o\vec{x}^o \end{pmatrix}, \tag{1}$$

où $\alpha > 0$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\vec{x}^o$ tel que $A\vec{x}^o = \vec{1}$, $M^o \in \mathbb{R}^{m\times n}$, m le nombre de mesures,

$$A = (n+1)^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $M^{oT}M^o$ est une matrice diagonale $n \times n$ telle que pour $i = 1, \dots, n$

$$(M^{oT}M^o)_{i,i} = \begin{cases} 1 & \text{si une measure est effectué pour l'indice } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.a) Le fichier matlab `optcontr2.m` implémente le système linéaire (1), complétez le.

1.b) On choisit $n = 19$ et $m = 3$. Si $\vec{b} = \vec{1}$ vérifier que $\vec{x}^* = \vec{x}^o$ et $\vec{q}^* = \vec{0}$ $\forall\alpha > 0$. Si $\vec{b} = 0.9 \cdot \vec{1}$ vérifier que $\vec{q}^*$ est proche de $0.1 \cdot \vec{1}$ et $\vec{x}^*$ de $\vec{x}^o$ lorsque α est petit en remplissant le tableau suivant (err$= \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i^* - x_i^o|$)

α	err
10^{-1}	
10^{-2}	
10^{-3}	
10^{-4}	
10^{-5}	
10^{-6}	
10^{-7}	
10^{-8}	

Exercice 2

Dans le cours nous avons minimisé $\frac{\alpha}{2}||\vec{q}||^2 + \frac{1}{2}||B\vec{q} - \vec{c}||^2$, où $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$ sont donnés. Ici nous voulons minimiser $\frac{1}{2}||\vec{q}||^2$ sous la contrainte $B\vec{q} = \vec{c}$, on cherche donc $\vec{q}^* \in \Omega$ tel que $f(\vec{q}^*) \leqslant f(\vec{q})$ $\forall\vec{q} \in \Omega$.

2.a) Définir $f(\vec{q})$, $\forall\vec{q} \in \mathbb{R}^n$ et Ω.

2.b) Définir le Lagrangien $\mathcal{L}(\vec{q}, \vec{\mu})$, $\forall\vec{q} \in \mathbb{R}^n$, $\forall\vec{\mu} \in \mathbb{R}^m$.

2.c) Calculer $\partial_{\vec{q}}\mathcal{L}(\vec{q}, \vec{\mu})$.

2.d) Ecrire les conditions KKT pour $\vec{q}^* \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{\mu}^* \in \mathbb{R}^m$.

2.e) Utilisez le code optcontr4.m (ou le jupyter notebook optcontr4_notebook) et les memes donnes de l'exercice 1.b. Verifiez les resultats obtenus.