Série 13

Exercice 1

On considère le problème suivant : trouver $\vec{x}^* \in \Omega$ tel que $f(\vec{x}^*) \leqslant f(\vec{x})\ \forall \vec{x} \in \Omega$ avec $f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}^T A \vec{x} - \vec{b}^T \vec{x}$ où $A \in \mathbb{R}^{n+2,n+2}$ définie par

$$A = (n+1)^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$\vec{b} \in \mathbb{R}^{n+2}$ définie par $b_i = \pi^2 \cos(\pi \frac{i-1}{n+1})$ et $\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+2} : \sum_{i=1}^{n+2} x_i = 0\}$.
Remarque : ce problème correspond à la discrétisation par une méthode de différence finies du problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) & = \pi^2 \cos(\pi x) \quad 0 < x < 1 \\ u'(0) & = 0 \\ u'(1) & = 0 \\ \int_0^1 u(x)dx & = 0 \end{cases}$$

Ainsi x_i^* seront une approximation de $u(\frac{i-1}{n+1})$, $i = 1, \ldots, n+2$.

1.a) Vérifier que les conditions KKT peuvent s'écrire : trouver $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^{n+2}$ et $\mu^* \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} A & -B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}^* \\ \mu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

où B est à préciser.

1.b) Le fichier matlab/octave `intzero.m` implémente ce problème, complétez-le et vérifiez que x_i^* est bien une approximation de $u(\frac{i-1}{n+1})$.

Exercice 2

Soit $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

2.a) Montrer que $\ker B = (\mathrm{Im} B^T)^\perp$.

2.b) En déduire que $\mathrm{Im} B^T = (\ker B)^\perp$.