ANALYSE NUMÉRIQUE ET OPTIMISATION — 14 Avril 2025
SMT
M. Picasso

Série 12

Exercice 1

Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C^0[0,1]$, n fonctions linéairement indépendantes appellées "fonctions de base". Soit $0 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leqslant 1$ m points d'interpolation et soit $y_1, \ldots, y_m$ des valeurs données. On cherche la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x)$ qui approche au mieux les points (x_j, y_j), $j = 1, \ldots, m$, c'est à dire on veut minimiser

$$\min_{\alpha_i} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x_j) - y_j \Big)^2.$$

Soit $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ $f(\vec{\alpha}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x_j) - y_j \right)^2$, on cherche $\vec{\alpha}^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\vec{\alpha}^*) \leqslant f(\vec{\alpha})$ $\forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$.

1.a) Vérifier que $\vec{\alpha}^*$ satisfait $A^T(A\vec{\alpha}^* - \vec{b}) = 0$ où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ sont à définir.

1.b) Compléter le fichier `neurls.m`.

1.c) On considère le cas où $\varphi_i(x) = \max(0, x - \frac{i}{n+1})$ $i = 1, \ldots, n$ et $y_j = f(x_j)$ avec $f(x) = 1 + \tanh(100(x - \frac{1}{2}))$ et $x_j = \frac{j}{m+1}$ $j = 1, \ldots, m$. Comparer $f(x)$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i^* \phi_i(x)$ pour $m = 99$ et $n = 9, 19, 39, 79$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Le fichier `gradconst.m` implémente la méthode du gradient à pas constant pour résoudre le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$.

2.a) Sachant que les valeurs propres de la matrice A sont données par $\lambda_i = 2(1 - \cos(\frac{i\pi}{n+1}))$, $i = 1, \ldots, n$, vérifier que $\lambda_n = 4 - \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ et donc que la méthode converge si $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

2.b) Implémenter la méthode du gradient à pas optimal.

2.c) Vérifier que les deux méthodes convergent en $\mathcal{O}(n^2)$ itérations. Pour ce faire remplir le tableau suivant

n	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.49$	$\alpha = 0.6$	α *optimal*
9				
19				
39				
79				

Nombre d'itérations en fonction de n et α.