Série 10

Exercice 1

Le but de cet exercice est de compléter et d'utiliser un programme permettant d'approcher la solution de l'équation des ondes unidimensionnelle par une méthode de **différences finies centrées** en espace et en temps (schéma de Newmark).
Soit w une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$. Nous cherchons une fonction u telle que

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & \forall\, x \in]0,1[,\ \forall\, t>0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall\, t > 0, \\ u(x,0) = w(x) & \forall\, x \in [0,1], \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & \forall\, x \in]0,1[. \end{cases}$$

Pour tout entier N strictement positif, divisons l'intervalle $[0,1]$ en $(N+1)$ parties de longueur $h = 1/(N+1)$, notons $x_j = jh$, $j = 0,1,...,N+1$. Choisissons τ le pas de temps, M le nombre de pas de temps, posons $t_n = n\tau$, $n = 0,1,2,...,M$. Posons encore $u_j^0 = w(x_j)$, ainsi que

$$u_j^1 = u_j^0 + \frac{\tau^2}{2}\frac{u_{j-1}^0 - 2u_j^0 + u_{j+1}^0}{h^2}, \qquad j = 1,...,N, \tag{1}$$

où nous avons noté $u_0^0 = 0$ et $u_{N+1}^0 = 0$.
On considère le cas où la fonction w est définie par $w(x) = \exp(-1000(x-0.5)^2)$.

1.a) Pour $n = 1,2,...,M$, notons u_j^{n+1} une approximation de $u(x_j, t_{n+1})$. Ecrire le schéma pour obtenir u_j^{n+1}, sous la forme

$$u_j^{n+1} = \alpha u_j^n + \beta u_j^{n-1} + \gamma u_{j-1}^n + \delta u_{j+1}^n.$$

Expliciter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Spécifier le domaine de validité des indices et préciser les conditions aux limites.

1.b) Compléter le fichier Matlab `newmark.m`.

1.c) Exécuter l'algorithme avec $\tau = h$ et vérifier que $u_j^n = u(x_j, t_n)$.

1.d) Vérifier que le schéma est stable si $\tau \leqslant h$.

1.e) Vérifier que le schéma est d'ordre $h^2 + \tau^2$ si $\tau \leqslant h$. Remplir pour ceci le tableau suivant.

$N+1$	h	τ	M	Erreur
20	0.05	0.04	5	
40	0.025	0.02	10	
80	0.0125	0.01	20	
160	0.00625	0.005	40	
320	0.003125	0.0025	80	
640	0.0015625	0.00125	160	

Exercice 2

Soient c_0 une constante positive donnée et $w : x \in \mathbb{R} \mapsto w(x) \in \mathbb{R}$ une fonction une fois continûment dérivable donnée telle que $w(x) = 0$, $x \leqslant 0$. On considère l'équation de transport :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c_0 \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, & \forall\, x \in [0,1],\ \forall\, t > 0, \\ u(x,0) = w(x), & \forall\, x \in [0,1], \\ u(0,t) = 0, & \forall\, t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

2.a) Vérifiez que la solution de $(\mathcal{P})$ est donnée par

$$u(x,t) \;=\; w(x - c_0 t), \qquad \forall\, x \in [0,1],\ \forall\, t > 0. \tag{2}$$

2.b) Soient N un entier positif, $h = 1/(N+1)$ le pas d'espace et τ le pas de temps. On veut calculer des approximations u_j^n de $u(x_j, t_n)$, où $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N+1$ et $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Etablir le schéma d'approximation du problème $(\mathcal{P})$ en utilisant une méthode d'Euler progressive et une méthode de différences finies **décentrées** en espace. **Spécifier le domaine de validité des indices et préciser les conditions aux limites et la condition initiale**.

2.c) Le fichier MATLAB `transport.m` correspond au schéma établi en **2.b)**. Ce fichier est incomplet. Complétez-le.

2.d) Vérifiez numériquement que le schéma est d'ordre $h + \tau$. Pour ce faire, considérez le cas particulier où $c_0 = \frac{1}{2}$ et où la fonction w est définie par

$$w(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-0.3)^2}{(x-0.1)^2}} & \text{si } x \in]0.1, 0.3], \\ e^{-\frac{(x-0.3)^2}{(x-0.5)^2}} & \text{si } x \in]0.3, 0.5[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3}$$

Tapez successivement `transport(39,20,0.04)`, `transport(79,40,0.02)`, `transport(159,80,0.01)`, `transport(319,160,0.005)`, etc. Notez que l'erreur est approximativement divisée par deux à chaque fois.

2.e) Vérifiez numériquement que le schéma est stable si $\tau \leqslant \frac{h}{c_0}$. Par exemple, tapez

`transport(49,20,0.039)`, `transport(49,20,0.040)`, puis `transport(49,20,0.042)`,...

Que peut-on observer lorsque $\tau = \frac{h}{c_0}$? Que devient le schéma dans ce cas ?