

Corrigé 13

Exercice 1

- 1.a) On commence par écrire les conditions KKT. On a $p = 1$ et $m = 0$. On définit la fonction $h_1(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n+2} x_i$, les conditions KKT s'écrivent donc : $\exists \mu^* \in \mathbb{R}$ tel que

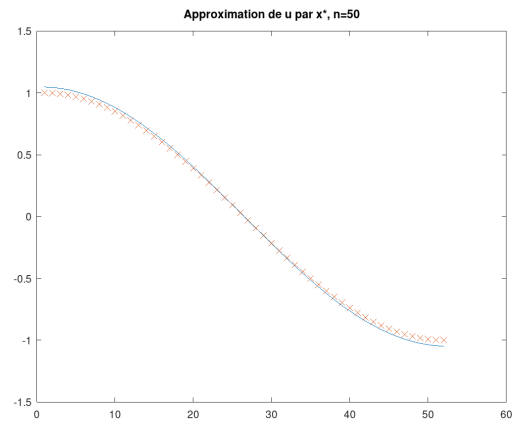
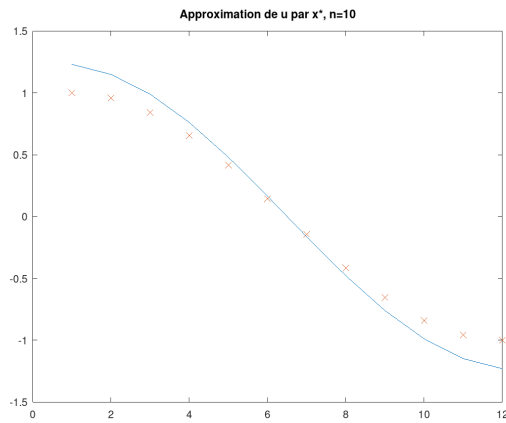
$$A\vec{x}^* - \vec{b} = \mu^* \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$h_1(\vec{x}^*) = 0.$$

En posant $B = (1, \dots, 1)$, on vérifie facilement que ceci est équivalent à trouver $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^{n+2}$ et $\mu^* \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} A & -B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}^* \\ \mu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- 1.b) Le fichier est complété de la manière suivante :

```
function sol=intzero(n)
    A = sparse(2:n+2,1:n+1,-1,n+2,n+2) + sparse(1:n+2,1:n+2,2,n+2,n+2) + sparse(1:n+1,2:n+2,-1,n+2,n+2);
    A(1,1)=1;
    A(n+2,n+2)=1;
    A=A*(n+1)*(n+1);
    B=ones(1,n+2);
    mat1= horzcat(A,-B');
    mat2 = horzcat(B,0);
    mat=vertcat(mat1,mat2);
    %full(mat)
    b=sparse(n+1,1);
    for i=1:n+2
        b(i)=pi*pi*cos(pi*((i-1)/(n+1)));
    end
    rhs = vertcat(b,0);
    %full(rhs)
    sol=mat\rhs;
    plot(sol(1:n+2));
end
```



La solution du problème différentiel est $u(x) = \cos(\pi x)$, on observe que x_i^* approche $u(\frac{i-1}{n+1})$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 2

2.a) Montrons que $\ker B = (\operatorname{Im} B^T)^\perp$, on a

$$\begin{aligned}
 (\vec{x} \in \ker B) &\iff (\vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } B\vec{x} = \vec{0}) \\
 &\iff (\vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \vec{y}^T B\vec{x} = 0 \ \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^p) \\
 &\iff (\vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \vec{x}^T B^T \vec{y} = 0 \ \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^p) \\
 &\iff (\vec{x} \in (\operatorname{Im} B^T)^\perp).
 \end{aligned}$$

2.b) Puisque $\ker B = (\operatorname{Im} B^T)^\perp$ on a

$$(\ker B)^\perp = (\operatorname{Im} B^T)^{\perp\perp} = \operatorname{Im} B^T.$$