Corrigé 10

Exercice 1

1.a) Le schéma s'écrit :

$$u_j^{n+1} = \left(2 - \frac{2\tau^2}{h^2}\right) u_j^n - u_j^{n-1} + \frac{\tau^2}{h^2} u_{j-1}^n + \frac{\tau^2}{h^2} u_{j+1}^n, \quad j = 1, ..., N,$$

avec $u_0^n = 0$ et $u_{N+1}^n = 0$. Donc

$$\alpha = 2\left(1 - \frac{\tau^2}{h^2}\right),$$
$$\beta = -1,$$
$$\gamma = \delta = \frac{\tau^2}{h^2}.$$

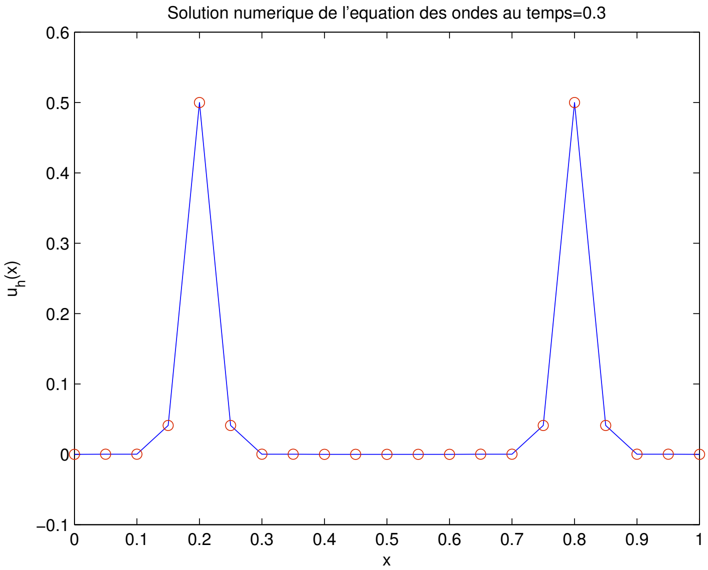
Ce schéma permet de calculer les valeures u_j^{n+1}, $n = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, N$. L'équation (2) s'obtient en effectuant le développement de Taylor

$$u(x_j, t_1) = u(x_j, t_0) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_0) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_0) + O(\tau^3).$$

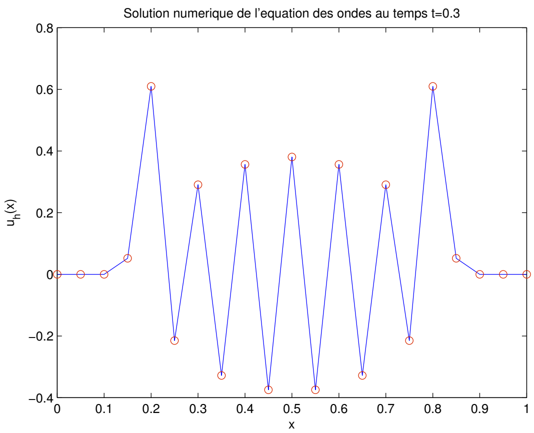
1.b) Le fichier MATLAB **newmark.m** est complété de la manière suivante :

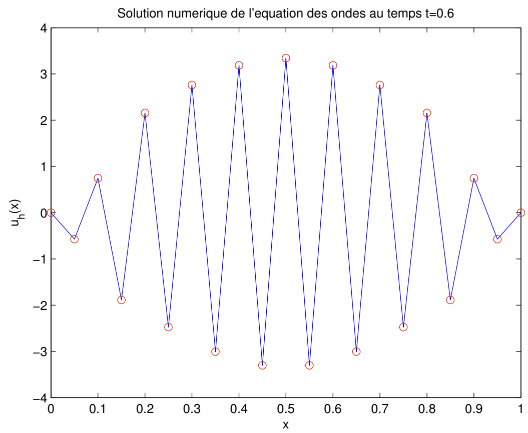
```
...
for i=1:N
  u0(i)=w(i*h);
end
u1(1)=(1-lambda)*u0(1)+lambda/2*u0(2);
for i=2:N-1
  u1(i)=(1-lambda)*u0(i)+lambda/2*(u0(i-1)+u0(i+1));
end
u1(N)=(1-lambda)*u0(N)+lambda/2*u0(N-1);
%
% schema de Newmark
%
t=tau;
for n=2:M
  t=t+tau;
  u2(1)=2*(1-lambda)*u1(1)+lambda*u1(2)-u0(1);
  for i=2:N-1
    u2(i)=2*(1-lambda)*u1(i)+lambda*(u1(i-1)+u1(i+1))-u0(i);
  end
  u2(N)=2*(1-lambda)*u1(N)+lambda*u1(N-1)-u0(N);
...
function init = w(x)
init = exp(-1000*(x-0.5)^2);
%
```

1.c) Lorsque $\tau = h$, le schéma devient $u_i^n = \frac{1}{2}(u_{i-n}^0 + u_{i+n}^0)$, $\quad i = 1, \dots, N$; cela se montre en supposant $\tau = h$ et en regardant l'expression de u_j^1. La solution est donc nodalement exacte dans ce cas.



1.d) Le schéma est stable sous la condition $\tau \leqslant h$, dans le cas contraire il produit à un moment ou un autre des valeurs $|u_j^n|$ qui augmentent indéfiniment lorsque n augmente. Pour $\tau = 0.051$ et $h = 0.05$ par exemple, nous obtenons les résultats suivants :





1.e) On obtient les résultats suivants au temps $t = 0.2$:

$N+1$	h	τ	M	Erreur
20	0.05	0.04	5	2.566516e-01
40	0.025	0.02	10	1.155658e-01
80	0.0125	0.01	20	2.895243e-02
160	0.00625	0.005	40	7.411754e-03
320	0.003125	0.0025	80	1.814622e-03
640	0.0015625	0.00125	160	4.524545e-04

On note que, pour h et τ suffisamment petits, l'erreur est approximativement divisée par quatre lorsque h et τ sont divisés par deux. Le schéma est donc bien d'ordre $h^2 + \tau^2$.

Exercice 2

2.a) Comme $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = w'(x - c_0 t)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -c_0 w'(x - c_0 t)$, $u(x,t)$ vérifie l'équation de transport. De plus on a bien $u(x,0) = w(x)$ et $u(0,t) = w(-c_0 t) = 0$ par définition de la fonction $w(x)$.

2.b) On pose $u_i^0 = w(x_i),\ i = 0, ..., N+1$. Soit $n \geqslant 0$ fixé. Etant donné $u_i^n,\ i = 0, ..., N+1$, le problème discrétisé en temps et en espace par un schéma progressif décentré revient à chercher les $u_i^{n+1},\ i = 0, ..., N+1$ tels que :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c_0 \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0, \qquad i = 1, \dots, N+1,$$

avec $u_0^{n+1} = 0$. On peut encore écrire le schéma de manière explicite :

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{c_0 \tau}{h}\right) u_i^n + \frac{c_0 \tau}{h} u_{i-1}^n,\ i = 1, \dots, N+1. \tag{1}$$

2.c) Le fichier MATLAB `transport.m` est complété de la manière suivante :

```
for n=1:M
  t=t+tau;
  unew(1)= uold(1)-(c*tau)/(h)*(uold(1)) ;
  for i=2:(N+1)
    unew(i)= uold(i)-(c*tau)/(h)*(uold(i)-uold(i-1)) ;
  end
%
  for i=1:(N+1)
    uold(i)=unew(i);
  end
end
```

2.d) On a les résultats suivants au temps $t = 0.8$:

$N+1$	h	τ	M	Erreur
20	0.05	0.08	10	2.359758e-01
40	0.025	0.04	20	1.853599e-01
80	0.0125	0.02	40	1.270456e-01
160	0.00625	0.01	80	8.128324e-02
320	0.003125	0.005	160	4.869991e-02
640	0.0015625	0.0025	320	2.752655e-02
1280	0.00078125	0.00125	640	1.484707e-02

On note que, pour h et τ suffisamment petits, l'erreur est approximativement divisée par deux lorsque h est divisé par deux et τ est divisé par deux. Le schéma est donc bien d'ordre $h + \tau$.

2.e) On remarque que lorsque la condition *CFL* $\tau \leqslant \frac{h}{c_0}$, est violée, la solution présente des oscillations et finit par "exploser". Lorsque $\tau < \frac{h}{c_0}$, le schéma est stable, mais on remarque un effet de *diffusion* (la solution numérique est amortie). Lorsque $\tau = \frac{h}{c_0}$, le schéma devient $u_i^{n+1} = u_{i-1}^n$, $i = 1, \dots, N+1$; la solution est donc exacte dans ce cas !