Série 8

Exercice 1

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée. On considère le problème aux limites suivant :
Trouver une fonction $u : x \in [0,1] \to u(x) \in \mathbb{R}$, telle que

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{pour tout } x \in [0,1], \\ u'(0) = 0, & \\ u(1) = 0. & \end{cases} \tag{1}$$

On veut résoudre numériquement le problème (1) par une méthode d'éléments finis.

1.a) Soit V l'ensemble des fonctions continues $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, de première dérivée g' continue par morceaux, et telles que $g(1) = 0$. Montrer que la formulation faible du problème (1) consiste à trouver $u \in V$ telle que :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx \;=\; \int_0^1 f(x)v(x)dx, \qquad \text{pour toute fonction } v \in V. \tag{2}$$

1.b) On considère une méthode d'éléments finis continus de degré 1 pour résoudre (1). Pour ceci, posons N un entier positif, $h = \frac{1}{N+1}$ et $x_j = jh$ avec $j = 0, 1, 2, ..., (N+1)$. Les fonctions "*chapeaux*" φ_j de la base d'éléments finis associées aux points x_j, $j = 1, ..., N$, sont données par :

$$\varphi_j(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{h} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{si } x < x_{j-1} \text{ ou } x > x_{j+1}. \end{cases} \tag{3}$$

La fonction φ_0 associée au point x_0 est donnée par

$$\varphi_0(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h} & \text{si } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{si } x > x_1 \end{cases} \tag{4}$$

Représenter graphiquement les fonctions de base. Ecrire l'approximation de Galerkin correspondant au problème (2) avec les fonctions φ_i comme fonctions de base, puis le système linéaire équivalent :

$$A\vec{u} = \vec{f}. \tag{5}$$

Expliciter les coefficients de A et $\vec{f}$ (sans évaluer les intégrales).

1.c) On utilise la formule du trapèze pour évaluer les intégrales présentes dans les coefficients du second membre $\mathbf{f}$. Le système ainsi obtenu sera noté

$$A\vec{\tilde{u}} = \vec{\tilde{f}}. \tag{6}$$

Calculer les coefficients de la matrice A et du second membre $\vec{\tilde{f}}$. Montrer qu'on aboutit au système linéaire

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Expliciter α.

1.d) On veut résoudre le problème (1) par la méthode de différences finies centrées. Ecrire le schéma pour les indices $i = 1, \dots, N$. Pour l'indice $i = 0$ on utilise les deux formules de différences finies suivantes :

$$\frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = 0,$$
$$\frac{-u_{-1} + 2u_0 - u_1}{h^2} = f(x_0).$$

Eliminer u_{-1} et écrire le système linéaire correspondant. Comparer avec le système (1) obtenu par la méthode des éléments finis.

Exercice 2

Soit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Montrez que A est symétrique définie positive.
Indication : montrez que $\vec{x}^\intercal A \vec{x} > 0$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\vec{0}\}$.