Série 11

Exercice 1

Soit N un entier positive et $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

1.a) Le fichier Matlab `puissinv.m` est à votre disposition. Il implémente la méthode de la puissance et de la puissance inverse pour trouver la plus grande et la plus petite valeur propre la matrice A. Ce fichier est incomplet, complétez-le.

1.b) Vérifiez numériquement que ces deux méthodes convergent vers la plus grande et la plus petite valeur propre donnée par $\lambda_1 = 2 - 2\cos(\frac{N\pi}{N+1})$ et $\lambda_N = 2 - 2\cos(\frac{\pi}{N+1})$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Utilisez le fichier Matlab `svd1.m` pour faire la SVD de A et vérifier que A est de rang 2.
Vous pouvez aussi utiliser le jupyter notebook : svd1_notebook

Exercice 3

On considère une image en niveaux de gris qu'on transforme en une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On effectue la SVD de A et on approche A par $\sum_{i=1}^{20} \sigma_i \vec{u_i}\vec{v_i}^T$, voir le fichier `svd2.m`. Comparez les deux images ainsi obtenues.
Vous pouvez aussi utiliser le jupyter notebook : svd2_notebook

Exercice 4

On considère une expérience qui génère des vecteurs $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n} \in \mathbb{R}^m$ (par example la température en Suisse pendant 365 jours ; dans ce cas m est le nombre de mesures prises chaque jour en Suisse et $n = 365$). On construit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{a_1} & \vec{a_2} & \ldots & \vec{a_n} \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$

on effectue la SVD de A et on compare $\vec{a_i}$ et $(\vec{a_i}^T\vec{u_1})\vec{u_1} + (\vec{a_i}^T\vec{u_2})\vec{u_2} + (\vec{a_i}^T\vec{u_3})\vec{u_3}$ avec $i = 1, \frac{n}{2}, n$.
Le fichier `svd3.m` contient les résultats dans le cas suivant

$$\vec{a_i} = \alpha_i \sin(\pi\vec{x}) + \beta_i \sin(2\pi\vec{x}) + \gamma_i \text{sign}(\vec{x} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{10}\vec{\delta} \tag{1}$$

avec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m+1} \\ \vdots \\ \frac{m}{m+1} \end{bmatrix}, \quad \sin(\pi\vec{x}) = \begin{bmatrix} \sin(\frac{\pi}{m+1}) \\ \vdots \\ \sin(\frac{m\pi}{m+1}) \end{bmatrix}, \quad \sin(2\pi\vec{x}) = \begin{bmatrix} \sin(\frac{2\pi}{m+1}) \\ \vdots \\ \sin(\frac{2m\pi}{m+1}) \end{bmatrix}, \quad \mathrm{sign}(\vec{x} - \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{m+1} - \frac{1}{2}}{|\frac{1}{m+1} - \frac{1}{2}|} \\ \vdots \\ \frac{\frac{m}{m+1} - \frac{1}{2}}{|\frac{m}{m+1} - \frac{1}{2}|} \end{bmatrix},$$

et $(\vec{\delta})_i = \delta_i$, où α_i, β_i, γ_i et δ_i sont des réalizations d'une variable uniforme entre 0 et 1.