EPFL

1

Ens. : Marco Picasso
Analyse numérique et optimisation - MT
04.07.2024, 15.15-18.15
Durée : 180 minutes

[redacted]

SCIPER: [redacted]

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 24 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple** il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera :
  - $+1/N$ points si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes,
  - 0 point si vous ne cochez rien,
  - $-1/M$ point si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes; si $M = 0$: pas de points négatifs.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si vous cochez la réponse correcte,
  - 0 point si vous ne cochez rien,
  - -1 point si vous cochez la réponse incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Il y a 26 questions à **choix multiple** ou questions **vrai-faux** et 8 points répartis sur une question **à rédiger**.
- **Aucune page supplémentaire ne pourra être ajoutée à ce document.**

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
☒ ☑ ■	☐	☐

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures.

Soit $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on approche $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t$ à l'aide de la formule de quadrature:

$$J(g) = g(-\alpha) + g(\alpha), \text{ où } 0 < \alpha < 1. \tag{1}$$

Question [MCQ-001] On a :

■ Pour $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_2$.

☐ Pour $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_4$.

■ Pour tout $0 < \alpha < 1$ on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_1$.

■ Pour $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_3$.

☐ Pour $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)\mathrm{d}t = J(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_5$.

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, N un entier positif, $h = 1/N$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$. On a

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^{1} f(x_i + h\frac{t+1}{2})dt. \tag{2}$$

Question [TF-002] Vrai ou faux ?

■ VRAI ☐ FAUX

On approche les intégrales de -1 à 1 dans (2) en utilisant la formule de quadrature (1) avec $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; On obtient ainsi l'approximation $L_h(f)$.

Question [MCQ-003] On a

■ $\forall\, f \in \mathcal{C}^4[0, 1]$, $\exists\, C > 0$, $\forall\, 0 < h \leq 1$:

$$\left| \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - L_h(f) \right| \leq Ch^4.$$

☐ $\exists\, C > 0$, $\forall\, f \in \mathcal{C}^4[0, 1]$, $\forall\, 0 < h \leq 1$ on a

$$\left| \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - L_h(f) \right| \leq Ch^4.$$

■ $L_h(f) = \dfrac{h}{2} \displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} \left(f\left(x_i + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} h \right) + f\left(x_i + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} h \right) \right)$.

Catalogue

Etant donné $f : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, on cherche $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - 10\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(x,t), & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Soit N un entier positif, $h = 1/(N+1)$ le pas d'espace, $x_i = ih, i = 0,1,...,N+1$. Soit τ le pas de temps, $t_n = n\tau, n = 0,1,2,...$. On note u_i^n une approximation de $u(x_i,t_n)$ obtenue à l'aide du schéma de différences finies suivant :

on écrit l'équation au point x_i et temps t_{n+1} et on approche $\partial u/\partial t$ par une formule de différences finies rétrograde (schéma implicite), $\partial^2 u/\partial x^2$ par une formule de différence finies centrée et $\partial u/\partial x$ par une formule de différence décentrée. A chaque pas de temps, il s'agit de résoudre le système linéaire

$$A\vec{u}^{n+1} = \vec{b}$$

où $b_i = u_i^n + \tau f(x_i, t_{n+1}), i = 1,...,N$. Le fichier matlab/octave `exam1.m` implémente ce schéma dans le cas où $f(x,t) = -10\pi\cos(\pi x)e^{-\pi^2 t}$.

Question [MCQ-004] A la ligne `a(i) = 1+2*tau/(h*h) ???;`, il faut remplacer les `???` par

- [x] `+10*tau/h`
- [ ] `-10*tau/h`
- [ ] `+10*tau/(2*h)`
- [ ] `-10*tau/(2*h)`

Question [MCQ-005] A la ligne `c(i)=-tau/(h*h) ???`, il faut remplacer les `???` par

- [x] `-10*tau/h`
- [ ] `+10*tau/h`
- [ ] `+10*tau/(2*h)`
- [ ] `-10*tau/(2*h)`

Question [MCQ-006] A la ligne `a(i)=a(i)-???`, il faut remplacer les `???` par

- [x] `c(i-1)*d(i-1)`
- [ ] `a(i-1)*d(i-1)`
- [ ] `a(i)*d(i-1)`
- [ ] `a(i-1)*d(i)`

Question [MCQ-007] A la ligne `c(i)=c(i)/???`, il faut remplacer les `???` par

- [x] `a(i)`
- [ ] `a(i+1)`
- [ ] `b(i+1)`
- [ ] `b(i)`

Une fois complété, le fichier donne les résultats suivants.

```
octave:40> u=exam1(19,5,0.01);
erreur maximum au temps final  4.505849e-02
octave:41> u=exam1(39,10,0.005);
erreur maximum au temps final  2.478798e-02
octave:42> u=exam1(79,20,0.0025);
erreur maximum au temps final  1.303452e-02
octave:43> u=exam1(159,40,0.00125);
erreur maximum au temps final  6.689130e-03
```

Question [MCQ-008] On déduit de ces résultats

- ☐ Le schéma est stable pour tout $h \geq 0$ et pour tour $\tau \geq 0$.
- ☐ Le schéma est stable pour $\tau \leq \dfrac{h}{10}$.
- ☐ Le schéma converge à l'ordre $h^2 + \tau$.
- ■ Le schéma converge à l'ordre $h + \tau$.

```
function [b]=exam1(N,M,tau)
%
%  Schema d'Euler retrograde pour un probleme de convection-diffusion evolutif.
%  A chaque pas de temps, il faut resoudre le systeme lineaire A u^{n+1} = b
%  ou u^{n+1} est le vecteur qui contient les approximations de u(x_i,t^{n+1}).
%
%  parametres
%
%  N        : nombre d'inconnues du systeme lineaire
%  M        : nombre de pas de temps
%  tau      : pas de temps
%  b        : N-vecteur, a chaque pas de temps,
%             b est le second membre du systeme lineaire A u^{n+1} = b,
%             puis la solution du systeme lineaire u^{n+1}.
%  h        : pas d'espace
%  t        : temps courant
%  a        : N-vecteur, diagonale de la matrice A,
%             puis diagonale de L tq  A=LU
%  c        : (N-1)-vecteur, sur-diagonale de la matrice A,
%             puis sur-diagonale de U tq  A=LU
%  d        : (N-1)-vecteur, sous-diagonale de la matrice A,
%             puis sous-diagonale de L tq  A=LU
%

h=1/(N+1);
t=0;
%
% condition initiale
%
for i=1:N
  b(i)=sin(pi*i*h) ;
end
%
% remplissage de la matrice  A
%
for i=1:N
  a(i) = 1+2*tau/(h*h) ???;
end
for i=1:N-1
  d(i) = ??? ;
end
for i=1:N-1
  c(i) = -tau/(h*h) ???;
end
%
% decomposition A = LU
%
c(1)=???;
for i=2:N-1
  a(i) = a(i)-???;
  c(i) = c(i)/???;
end
  a(N) = a(N)-???;
%
% schema d'Euler retrograde
%
for n=1:M
  t=t+tau;
%
% second membre du systeme lineaire Ax=b
%
for i=1:N
  b(i) = b(i)-tau*10*pi*cos(pi*i*h)*exp(-pi*pi*t);
end
```

```
%
% resolution du systeme lineaire Ly = b
%
  b(1)=b(1)/???;
  for i=1:N-1
    b(i+1) = (b(i+1)-???)/a(i+1);
  end
%
% resolution du systeme lineaire U x = y
%
  for i=N-1:-1:1
    b(i) = (b(i)-???);
  end
end
err = 0;
for(i=1:N)
  erri = abs(b(i)-exp(-pi*pi*t)*sin(i*h*pi));
  if (erri>err)
    err = erri;
  end
end
fprintf(' erreur maximum au temps final  %e \n',err)
```

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, symétrique, définie positive, on note

$$\begin{aligned} &A\vec{\varphi}_i = \lambda_i \vec{\varphi}_i && i = 1, ..., n,\\ &\text{avec } \vec{\varphi}_i^{\top}\vec{\varphi}_j = \delta_{ij} && i,j = 1,...,n, \quad (\delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j, 0 \text{ sinon}),\\ &\text{et } 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n. \end{aligned}$$

Question [MCQ-009] Soit $\vec{x}^0 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \vec{\varphi}_j$, on note $\left\|\vec{x}^0\right\|^2 = \vec{x}^{0\top}\vec{x}^0$, on a

■ $\beta_j = \vec{x}^{0\top}\vec{\varphi}_j, \quad j = 1, ..., n$

□ $\|\vec{x}^0\| = \sum_{j=1}^{n} (\beta_j)^2$

■ $\|\vec{x}^0\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\beta_j)^2}$

Question [MCQ-010] On pose $\vec{x}^k = A\vec{x}^{k-1}, k = 1, 2, ...,$ on a:

■ $\vec{x}^1 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \vec{\varphi}_j$

■ $\vec{x}^k = \sum_{j=1}^{n} \beta_j (\lambda_j)^k \vec{\varphi}_j$

□ $\|\vec{x}^k\| = \sum_{j=1}^{n} \beta_j (\lambda_j)^k$

■ $\dfrac{\vec{x}^k}{\|\vec{x}^k\|} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} \beta_j (\lambda_j)^k \vec{\varphi}_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\beta_j)^2 (\lambda_j)^{2k}}}$

Question [MCQ-011] On suppose $\beta_n > 0$ et $\lambda_{n-1} < \lambda_n$, on a

■ $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\vec{x}^k}{\|\vec{x}^k\|} = \vec{\varphi}_n$

■ $\dfrac{\vec{x}^{k\top} A \vec{x}^k}{\|\vec{x}^k\|^2} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} (\beta_j)^2 (\lambda_j)^{2k+1}}{\sum_{j=1}^{n} (\beta_j)^2 (\lambda_j)^{2k}}$

■ $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\vec{x}^{k\top} A \vec{x}^k}{\left\|\vec{x}^k\right\|^2} = \lambda_n$

Question [MCQ-012] Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on a

- ■ $\vec{x}^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- □ $\vec{x}^3 = \begin{pmatrix} -12 \\ 13 \end{pmatrix}$
- ■ $\vec{x}^2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$
- □ $\vec{x}^4 = \begin{pmatrix} -39 \\ 40 \end{pmatrix}$
- ■ $\vec{\varphi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Question [MCQ-013] Soit m, n deux entiers positifs, $m > n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, on considère la décomposition en valeurs singulières de A, $A = U\Sigma V^\top$ où $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ et où $UU^\top = U^\top U = I$ et $VV^\top = V^\top V = I$. On note $\vec{u}_i$ la i^e colonne de U, $\vec{v}_i$ la i^e colonne de V.

- [x] $AA^\top U = U\Sigma\Sigma^\top$
- [ ] $AA^\top U = U\Sigma^\top\Sigma$
- [x] $AA^\top \vec{u}_i = \sigma_i^2 \vec{u}_i \quad i = 1, \ldots, n$
- [ ] $AA^\top \vec{v}_i = \sigma_i^2 \vec{v}_i \quad i = 1, \ldots, n$

Soit n en entier positif. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par

$$A = (n+1)^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & (\mathbf{0}) \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (\mathbf{0}) & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = -\vec{1}, \quad c > 0.$$

On cherche $\vec{x}^* \in \Omega$ tel que $f(\vec{x}^*) \leq f(\vec{x})\ \forall \vec{x} \in \Omega$ où $f(\vec{x}) = \dfrac{1}{2}\vec{x}^\top A\vec{x} - \vec{b}^\top \vec{x} + \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i)^4$ et $\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_i \geq -c, i = 1, ..., n\}$. Soit $\mathcal{L}$ le lagrangien défini $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i + c).$$

Les conditions KKT s'écrivent: trouver $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$, $\vec{\lambda}^* \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$(A\vec{x}^* - \vec{b})_i - \lambda_i^* + ??? = \vec{0}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$
$$x_i^* + c \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$
$$\vec{\lambda}^* \geq 0, \tag{5}$$
$$\lambda_i^* (???) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

Ici $\vec{\lambda}^* \geq \vec{0}$ signifie $\lambda_i^* \geq 0, i, ..., n$.

Question [`MCQ-014`] Dans l'équation (3), il faut remplacer ??? par

- ■ $(x_i^*)^3$
- □ x_i^*
- □ $(x_i^*)^2$
- □ $(x_i^*)^4$

Question [`MCQ-015`] Dans l'équation (6), il faut remplacer ??? par

- ■ $x_i^* + c$
- □ $(x_i^*)^2 + c$
- □ $x_i^* - c$
- □ $(x_i^*)^2 - c$

On considère la méthode des points intérieurs pour approcher la solution de (3)-(6). On introduit $\vec{s} = \vec{x}^* + c\vec{1}$ et on écrit les lignes (3)-(6) sous la forme

$$\begin{aligned} F(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*, \vec{s}) &= \vec{0}, \\ \vec{\lambda}^* &\geq \vec{0}, \\ \vec{s}^* &\geq \vec{0}, \end{aligned}$$

où F est définie $\forall (\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{s}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par

$$F(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{s}) = \begin{pmatrix} ??? \\ \vec{x} + c\vec{1} - \vec{s} \\ \lambda_1 (???) \\ \vdots \\ \lambda_n (???) \end{pmatrix}.$$

A chaque itération de l'algorithme, étant donné $(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{s})$ on doit résoudre le système linéaire

$$DF\left(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{s}\right) \begin{pmatrix} \Delta\vec{x} \\ \Delta\vec{\lambda} \\ \Delta\vec{s} \end{pmatrix} = F(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{s}).$$

Le fichier `exam2.m` implémente cet algorithme, lorsque $c = 0.05$.

Question [MCQ-016] A la ligne `mat(i,i)=mat(i,i)+???;` il faut remplacer les ??? par

- ■ `3*(x(i))^2`
- □ `(x(i))^3`
- □ `x(i)`
- □ `0.25*(x(i))^4`

Question [MCQ-017] A la ligne `mat1 = horzcat(mat,???,sparse(n,n));` il faut remplacer les ??? par

- ■ `-speye(n,n)`
- □ `3*speye(n,n)`
- □ `-3*speye(n,n)`
- □ `speye(n,n)`

Question [MCQ-018] A la ligne `mat3 = horzcat(sparse(n,n),???,???);` il faut remplacer les ??? dans l'ordre par

- ■ `diag(s)` et `diag(lambda)`
- □ `diag(c)` et `diag(s)`
- □ `diag(lambda)` et `diag(s)`
- □ `diag(s)` et `diag(c)`

Question [MCQ-019] A la ligne `rhs1(i)=rhs1(i)+???;` il faut remplacer les ??? par

- □ `3*(x(i))^2`
- ■ `(x(i))^3`
- □ `x(i)`
- □ `0.25*(x(i))^4`

Question [MCQ-020] A la ligne `rhs3(i)=???;` il faut remplacer les ??? par

- ■ `lambda(i)*s(i);`
- □ `lambda(i)*c(i)`
- □ `lambda(i)*s(i)-c(i)`
- □ `lambda(i)*s(i)+c(i)`

```
function x=exam2(n,eps)
A = (n+1)*(n+1)*(sparse(2:n,1:n-1,-1,n,n)
                + sparse(1:n,1:n,2,n,n) + sparse(1:n-1,2:n,-1,n,n));
b=-ones(n,1);
c=0.05*ones(n,1);
x=zeros(n,1);
lambda=max(eps,zeros(n,1));
s=max(eps,zeros(n,1));
for iter=1:10
  mat=A;
  for i=1:n
    mat(i,i)=mat(i,i)+???;
  end
  mat1 = horzcat(mat,???,sparse(n,n));
  mat2 = horzcat(speye(n,n),sparse(n,n),-speye(n,n));
  mat3 = horzcat(sparse(n,n),???,???);
  mat  = vertcat(mat1,mat2,mat3);
  rhs1 = A*x-b-lambda;
  for i=1:n
    rhs1(i)=rhs1(i)+???;
  end
  rhs2 = x+c-s;
  rhs3=sparse(n,1);
  for i=1:n
    rhs3(i)=???;
  end
  rhs = vertcat(rhs1,rhs2,rhs3);

  sol=mat\rhs;
  x=x-sol(1:n);
  lambda=max(eps,lambda-sol(n+1:2*n));
  s=max(eps,s-sol(2*n+1:3*n));
  discrep=norm(sol(1:n))/norm(x);
  printf ("iter: %d Discrepancy: %f \n",iter,discrep);
  if (discrep<0.001)
    break
  end
end
end
```

On considere le schéma d'Euler rétrograde pour résoudre l'équation differentielle

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t), t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est C^1 et $u_0 \in \mathbb{R}$. Soit $h > 0, t_n = nh, n = 0, 1, 2, ...$ Étant donné u^n une approximation de $u(t_n)$, il s'agit de trouver u^{n+1} telle que

$$u^{n+1} - u^n - hf(u^{n+1}, t_{n+1}) = 0.$$

Pour ce faire on utilise la méthode de Newton. Le fichier `exam3.m` implémente cette méthode pour l'equation differentielle

$$\begin{cases} u'(t) + u(t) + (u(t))^5 = 0, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Question [MCQ-021] A la ligne `newton = (x-u-h*???)/(???)` il faut remplacer les ??? au numérateur par

- ☐ `f(u,t)`
- ■ `f(x,t)`
- ☐ `dfdx(x,t)`
- ☐ `dfdx(u,t)`

Question [MCQ-022] et les ??? au dénominateur par

- ☐ `dfdx(x,t)`
- ☐ `dfdx(u,t)`
- ■ `1-h*dfdx(x,t)`
- ☐ `1-h*dfdx(u,t)`

Le fichier une fois complété donne les résultats suivants

```
octave:8> [u,err,mmax] = exam3(0.025,40)
uexact = 0.3101
u = 0.3172
err = 7.1006e-03
mmax = 3
octave:9> [u,err,mmax] = exam3(0.0125,80)
uexact = 0.3101
u = 0.3136
err = 3.5881e-03
mmax = 3
octave:10> [u,err,mmax] = exam3(0.00625,160)
uexact = 0.3101
u = 0.3119
err = 1.8039e-03
mmax = 2
octave:11> [u,err,mmax] = exam3(0.003125,320)
uexact = 0.3101
u = 0.3110
err = 9.0443e-04
mmax = 2
octave:12> [u,err,mmax] = exam3(0.0015625,640)
uexact = 0.3101
u = 0.3105
err = 4.5285e-04
mmax = 2
```

Question [MCQ-023] On déduit de ces résultats que

- ■ Le schéma d'Euler rétrograde converge en $\mathcal{O}(h)$
- ☐ Le schéma d'Euler rétrograde converge en $\mathcal{O}(h^2)$
- ■ La méthode de Newton converge pour tous les pas de temps utilisés.
- ☐ La méthode de Newton converge quel que soit le point de depart

```
function[u,err,mmax] = exam3(h,N)
%
% entrees  :    h   : pas de temps
%               N   : nombre de pas de temps
%
% sorties  :    u   : approximation de u au temps final (h*N)
%               err : erreur entre u et son approximation au temps final
%               mmax: nombre max d iterations dans la boucle de Newton
t=0;
u=1;
for n = 1:N
    t=t+h;
    x=u;
    mmax=0;
    for m = 1:10
        newton = (x-u-h*???)/(???);
        x = x - newton;
        if (abs(newton) < 1.e-8)
            mmax=max(m,mmax);
            break;
        end
    end
    u=x;
end
err=abs(u-uexact(t));
end
function f=f(x,t)
   f=-x-x^5;
end
function dfdx=dfdx(x,t)
   dfdx=-1-5*x^4;
end
function uexact = uexact(t)
   uexact=2^(3/4)*(-1/(1/2-exp(4*t)))^(1/4)/2
end
```

Soit n un entier impair, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par

$$A = (n+1)^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & (\mathbf{0}) \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (\mathbf{0}) & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$. Soit $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$, tel que $f(\vec{x}^*) \leq f(\vec{x})\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, où

$$f(\vec{x}) = \frac{\alpha}{2} \left\| A\vec{x} - \vec{b} \right\|^2 + \frac{1}{2} \left(x_{\frac{n-1}{2}+1} - 1 \right)^2.$$

Les conditions d'optimalité consistent à chercher $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{q}^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{pmatrix} A & -I \\ ??? & \alpha A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}^* \\ \vec{q}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Le fichier matlab/octave `exam4.m` implémente le calcul de $\vec{x}^*$ et $\vec{q}^*$ dans le cas où $\vec{b} = \vec{1}$.

Question [MCQ-024] A la ligne `mat1 = horzcat(???,-speye(n));`, il faut remplacer les ??? par

- [ ] `speye(n)`
- [x] `A`
- [ ] `diag(c)`
- [ ] `sparse(n)`

Question [MCQ-025] A la ligne `mat2 = horzcat(???,alpha*A');`, il faut remplacer les ??? par

- [ ] `speye(n)`
- [ ] `A`
- [x] `diag(c)`
- [ ] `sparse(n)`

Question [MCQ-026] On considère la matrice du système linéaire (7), on a

- [x] son noyau est réduit à l'élément nul
- [ ] son déterminant est zéro
- [x] son image est $\mathbb{R}^{2n}$
- [ ] la matrice est symétrique

```
function [x,q]=exam4(n,alpha)
A = (n+1)*(n+1)*(sparse(2:n,1:n-1,-1,n,n) + sparse(1:n,1:n,2,n,n) + sparse(1:n-1,2:n,-1,n,n));
b = ones(n,1);
c = zeros(n,1);
c((n-1)/2+1)=1;
mat1 = horzcat(???,-speye(n));
mat2 = horzcat(???,alpha*A');
mat  = vertcat(mat1,mat2);
rhs = vertcat(b,c);
sol=mat\rhs;
x=sol(1:end/2);
q=sol(end/2+1:end);
endfunction
```

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié quadrillé. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 27: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ■ 8

Montrer, que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall u \in C^4([x-2, x+2]), \exists C > 0, \forall h \in]0,1]$ on a

$$\left| u'(x) - \frac{u(x-2h) - 8u(x-h) + 8u(x+h) - u(x+2h)}{12h} \right| \leq Ch^3.$$

On demande d'expliciter C.

Catalogue

CATALOGUE