Corrigé 8

Exercice 1

1.a) Multiplions la première équation du problème (0) par une fonction v une fois continûment dérivable sur $[0, 1]$. En intégrant sur l'intervalle $[0, 1]$ nous obtenons

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En intégrant par parties la première intégrale de cette équation, nous obtenons

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - [u'(x)v(x)]_{x=0}^{x=1} = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

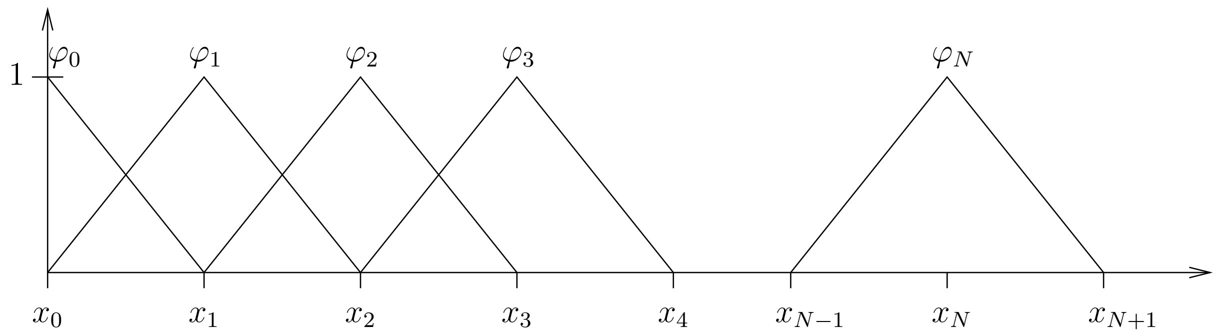
Si nous imposons à la fonction v d'être nulle en $x = 1$, en utilisant le fait que $u'(0) = 0$ nous arrivons à l'équation

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Soit V l'ensemble des fonctions continues $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, de première dérivée g' continue par morceaux et telles que $g(1) = 0$. La formulation faible de (0) consiste à trouver $u \in V$ tel que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \text{ pour toute fonction } v \in V. \tag{1}$$

1.b) La représentation graphique des fonctions de base $\varphi_i, i = 0, \ldots, N$ est la suivante :



Nous notons V_h le sous-espace vectoriel de V engendré par les fonctions $\varphi_i, i = 0, ..., N$. L'approximation de Galerkin correspondant au problème (1) consiste à trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx, \text{ pour toute fonction } v_h \in V_h. \tag{2}$$

Comme nous cherchons u_h dans V_h, nous pouvons écrire

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{N} u_i\varphi_i(x),$$

les coefficients u_i, $i = 0, \ldots, N$ étant les inconnues du problème. En choisissant $v_h = \varphi_j$, $j = 0, 1, 2, ..., N$ dans (2), nous obtenons le système de $N + 1$ équations à $N + 1$ inconnues suivant :

$$\sum_{i=0}^{N} u_i \left(\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx\right) = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx, \quad j = 0, 2, ..., N.$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme d'un système linéaire. Soit A la $(N+1)\times(N+1)$-matrice de coefficients A_{ij}, $0 \leqslant i,j \leqslant N$ et soit $\vec{f}$ le $(N+1)$-vecteur de coefficients f_j, $0 \leqslant j \leqslant N$ définis par :

$$A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx \qquad \text{et} \qquad f_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx.$$

Alors le problème (2) est équivalent à trouver le $(N+1)$-vecteur $\vec{u}$ tel que

$$A\vec{u} = \vec{f}.$$

Les seuls coefficients non-nuls de A sont les coefficients A_{jj}, $j = 0,\dots,N$, les coefficients $A_{j,j+1}$, $j = 0,\dots,N-1$ et les coefficients $A_{j+1,j}$, $j = 0,\dots,N-1$. Comme $A_{ji} = A_{ij}$ il suffit de calculer A_{jj} et $A_{j,j+1}$:

$$A_{jj} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi_j'(x))^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\varphi_j'(x))^2 dx, \quad j = 1,\dots,N,$$

$$A_{0,0} = \int_{x_0}^{x_1} (\varphi_0'(x))^2 dx$$

et

$$A_{j,j+1} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j'(x)\varphi_{j+1}'(x)dx, \quad j = 0,\dots,N-1.$$

De même nous avons

$$f_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\varphi_j(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx, \quad j = 1,\dots,N.$$

et

$$f_0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_0(x)dx.$$

1.c) On a $A_{jj} = \frac{2}{h}$, $A_{j,j+1} = -\frac{1}{h}$ pour $j = 1,\dots,N$ et $A_{0,0} = \frac{1}{h}$. Pour approcher les intégrales des coefficients de $\vec{f}$, nous utilisons la formule du trapèze :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)dx \approx \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\Big(g(x_k) + g(x_{k+1})\Big),$$

où $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue. On trouve donc

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx \approx hf(x_j) = \tilde{f}_j, \quad j = 1,\dots,N$$

et

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_0(x)dx \approx \frac{h}{2}f(x_0) = \tilde{f}_0.$$

Le système linéaire $A\vec{\tilde{u}} = \vec{\tilde{f}}$ est donc bien celui recherché avec $\alpha = \frac{1}{h}\tilde{f}_0 = \frac{1}{2}f(x_0)$.

1.d) La formule

$$\frac{u_{-1}-u_1}{2h} = 0$$

vient de la condition de bord $u'(0) = 0$ qu'on approche par une formule de différences finies centrées. La deuxième formule

$$\frac{-u_{-1}+2u_0-u_1}{h^2} = f(x_0)$$

vient de l'équation $-u''(x) = f(x)$ qu'on approche au point x_0 par une formule de différences finies centrées. En utilisant ces deux formules, et en appliquant le schéma de différences finies centrées pour les indices $i = 0,\dots,N$ on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1,\dots,N,\\
&\frac{-u_1+u_0}{h^2} = \frac{1}{2}f(x_0),\\
&u_{N+1} = 0.
\end{aligned}$$

Le système linéaire correspondant est le suivant :

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix},$$

donc c'est le même que celui qu'on a trouvé en 1.c).

Exercice 2

A est symétrique, car $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j.
De plus, si $\vec{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\vec{0}\}$ a les valeurs

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)$$

vous pouvez alors montrer, que

$$\vec{x}^\intercal A\vec{x} = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + ... + (x_{N-1} - x_N)^2 + x_N^2$$

qui est non négative (strictement plus grande que 0) en tant que somme de carrés, et nulle que si tous les éléments de $\vec{x}$ sont nuls.