ANALYSE NUMÉRIQUE ET OPTIMISATION 7 avril 2025
SMT
M. Picasso

Corrigé 11

Exercice 1

1.a) Le fichier MATLAB `puissinv.m` est complété de la manière suivante :

```
function [i,mu,x]=puissinv(N)
diag = 2*speye(N,N);
subd=-sparse(2:N,1:N-1,1,N,N);
A=diag+subd+subd';
x=ones(N,1);
mu=dot(x,A*x)/dot(x,x);

for i=1:1000
  x=A*x; %ou x=A\x pour la methode de la puissance inverse
  munew=dot(x,A*x)/dot(x,x);
  if (abs(munew-mu)/munew<0.0001)
    break
  endif
  mu=munew;
end
x=x/norm(x);
end
```

1.b) On vérifie que la méthode de la puissance inverse converge verse la plus petite valeur propre de la matrice A $\lambda_N = 2 - 2\cos(\frac{\pi}{N+1})$:

N	λ_N	μ	iterations
5	0.26795	0.26795	5
10	0.081014	0.081014	4
20	0.022338	0.022338	4
40	0.0058684	0.0058684	4
80	0.0015041	0.0015041	4

On verifie de la même façon que la méthode de la puissance converge vers la plus grand valeur propre $\lambda_1 = 2 - 2\cos(\frac{N\pi}{N+1})$.

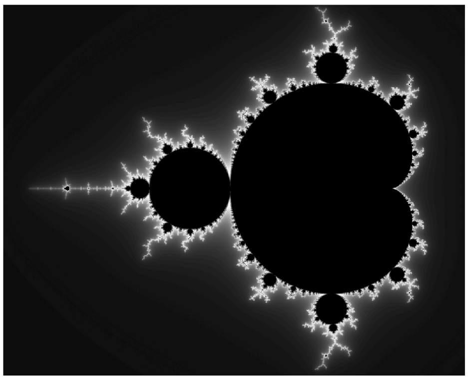
Exercice 2

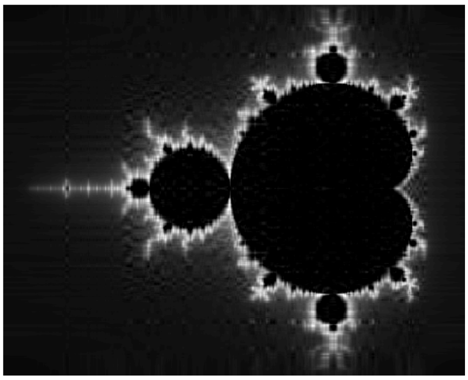
La SVD de A donne bien une matrice diagonal S avec les deux premiers coefficients non nuls (les autres sont inférieurs à 10^{-5}).
Remarque : On utilise la fonction *svds* de Matlab/Octave qui calcule par défaut les 6 valeurs singulières les plus grande de A et les 6 premières colonnes de U et V.

Exercice 3

Si on choisi $l = 20$, $\sum_{i=1}^{l} \sigma_i \vec{u_i} \vec{v_i}^T$ donne une approximation "raisonable" de A (au sens visuel). Puisque $A \in \mathbb{R}^{943\times1178}$, $\vec{u_i} \in \mathbb{R}^{943}$, $\vec{v_i} \in \mathbb{R}^{1178}$, la place mémoire pour mémoriser A est $943 \times 1178 = 1110854$ et la place mémoire pour mémoriser $\sum_{i=1}^{l} \sigma_i \vec{u_i} \vec{v_i}^T$ est $20(943 + 1178) = 42420$.
A gauche on observe l'image [1] initial correspondant à A et à droite on observe l'image correspondant à la SVD de A :

1. https ://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set





Exercice 4

On observe que

$$(\vec{a_i}^T \vec{u_1})\vec{u_1} + (\vec{a_i}^T \vec{u_2})\vec{u_2} + (\vec{a_i}^T \vec{u_3})\vec{u_3}$$

représente raisonnablement bien $\vec{a_i}$ $i = 1, \frac{n}{2}, n$. On retrouve donc une formule analogue à (1).