THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SOLUTIONS 9

Exercise 1. À faire vous-même.

Exercise 2. Supposons que G admette un unique p-sous-groupe de Sylow P. Comme gPg^{-1} est un sous-groupe de même cardinalité que P pour tout $g \in G$, on doit avoir $gPg^{-1} = P$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire que P est normal dans G. Réciproquement, supposons que P soit un p-sous-groupe de Sylow normal dans G. Soit Q un autre p-sous-groupe de Sylow. Alors, il existe $g \in G$ tel que $Q = gPg^{-1} = P$, ce qui montre l'unicité souhaitée.

Exercise 3. Comme l'ordre de tout élément de P est une puissance de p et que l'ordre de tout élément de Q est une puissance de q, on a $P \bigcap Q = 1$. De plus, P et Q sont normaux dans G par l'exercice précédent. Par le deuxième théorème d'isomorphisme, on a $PQ/Q \cong P/(P \bigcap Q)$ et ainsi $|PQ| = \frac{|P||Q|}{|P \bigcap Q|} = |P||Q| = |G|$. On obtient donc que $PQ = G$. On conclut en utilisant le fait que si P, Q sont normaux dans G, $PQ = G$ et $P \bigcap Q = 1$, alors $G \cong P \times Q$.

Exercise 4. Observons d'abord que $|A_5| = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Il suit du troisième théorème de Sylow que n_2, le nombre de 2-sous-groupes de Sylow de A_5, satisfait $n_2 = [A_5, N_{A_5}(P)]$ pour tout 2-sous-groupe de Sylow P. L'ordre des 2-sous-groupes de Sylow sont les sous-groupes d'ordre 4. Considérons le groupe de Klein $V_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, vu à l'exercice 4, feuille 7, qui satisfait

$$V_4 \triangleleft A_4 \leq A_5.$$

Ceci est un 2-sous-groupe de Sylow de A_5. Les permutations de ce groupe fixent toutes l'élément 5, et il existe quatre autres sous-groupes de cette forme, qui fixent respectivement les éléments $1, 2, 3$ et 4. Il y a donc au moins cinq 2-sous-groupes de Sylow de A_5. Mais comme $V_4 \triangleleft A_4$ est normal, on a $A_4 \leq N_{A_5}(V_4)$. Il suit que $n_2 = 60/|N_{A_5}(V_4)| \leq 60/|A_4| = 60/12 = 5$. Nous avons trouvé cinq 2-sous-groupes de Sylow distincts de A_5, et nous venons de montrer qu'il ne peut pas y en avoir plus, ce qui prouve que nous les avons tous trouvés.

Exercise 5. L'exercice découle du premier théorème de Sylow et du lemme suivant appliqué à un p-sous-groupe de Sylow.

Lemme 5.1 : Soit G un groupe d'ordre p^n pour un certain $n > 0$, alors G contient un sous-groupe normal d'ordre p^k pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$.

Preuve du Lemme : Rappelons qu'un groupe d'ordre p^r a un centre non trivial pour tout $r > 0$ (exercice 2.1 série 4). En utilisant une induction sur n, nous obtenons le lemme pour

$G/Z(G)$. Nous pouvons ensuite conclure par induction et le théorème de correspondance. Nous laissons au lecteur le soin de remplir les détails nécessaires.

Exercise 6. (1) Soit P un p-sous-groupe de Sylow de G et considérons l'action de H sur l'ensemble des classes à gauche G/P par multiplication à gauche. Nous avons donc l'équation suivante :

$$|G/P| = \sum_{\text{Orbites } H\cdot x} \frac{|H|}{|\mathrm{Stab}_H(x)|}.$$

Notez que $|G/P|$ est un entier premier avec p puisque P est un p-sous-groupe de Sylow. Puisque $p \mid |H|$, cela implique qu'il existe $gP \in G/P$ tel que $\mathrm{Stab}_H(gP) = H$. Ainsi, $hgP = gP$ pour tout $h \in H$ et donc $gHg^{-1} \subset P$. Cela montre que $H \subset gPg^{-1}$, qui est un p-sous-groupe de Sylow de G.

(2) Nous montrons dans la preuve de la dernière partie que, étant donné un p-sous-groupe de Sylow P et un sous-groupe H d'ordre p^k, il existe $g \in G$ tel que $gHg^{-1} \subseteq P$. Si H est un sous-groupe normal de G, cela implique que $H \subseteq P$ pour tout p-sous-groupe de Sylow $P \subseteq G$.

Exercise 7. Soit $g \in G$, alors comme K est un sous-groupe normal de G, nous obtenons que $gPg^{-1} \subseteq gKg^{-1} = K$. Comme gPg^{-1} est également un p-sous-groupe de Sylow de K, nous obtenons par le deuxième théorème de Sylow qu'il existe $k \in K$ tel que $kPk^{-1} = gPg^{-1}$. Cela implique que $(gk^{-1})P(gk^{-1})^{-1} = P$ et donc $gk^{-1} \in N_G(P)$. Nous obtenons ainsi que $G = KN_G(P)$. $\square$

Exercise 8. L'exposant de p dans la décomposition en nombres premiers de $p^r!$ est $p^{\frac{p^r-1}{p-1}}$. En effet, pour trouver la valeur souhaitée, il faut compter le nombre de multiples de p^k qui sont inférieurs à p^r pour $0 < k \leq r$. Pour p^k, ce nombre est p^{r-k}, donc leur somme est

$$\sum_{k=1}^{r} p^{r-k} = \sum_{k=0}^{r-1} p^k = \frac{p^r-1}{p-1}.$$

Ainsi, $p^{\frac{p^r-1}{p-1}}$ divise $p^r!$ et c'est la puissance maximale ayant cette propriété. Montrons maintenant par induction que

$$|S_{p^r}| = p^{\frac{p^r-1}{p-1}}.$$

Pour $r = 1$, l'ordre est p. Supposons que l'égalité soit vraie pour $k < r$. Il suffit d'observer que

$$|S_{p^r}| = p|S_{p^{r-1}}|^p.$$

Ceci conclut la preuve.

Exercise 9. Commençons par considérer la décomposition en nombres premiers $|G| = 48 = 2^4 \cdot 3$. Par le théorème 10 des notes de cours, nous savons que le nombre n_2 de 2-sous-groupes de Sylow doit satisfaire à la fois $n_2 = 1 \pmod 2$ et $n_2|3$. Par conséquent, nous savons que

$n_2 \in \{1, 3\}$. Si $n_2 = 1$, alors le 2-sous-groupe de Sylow unique P_2 est normal dans G car les 2-sous-groupes de Sylow sont conjugués les uns aux autres. Si $n_2 = 3$, considérons l'action de G sur l'ensemble des 2-sous-groupes de Sylow de G. Puisqu'il s'agit d'une action de G sur un ensemble à 3 éléments, cela correspond à un homomorphisme de groupes $\varphi : G \to S_3$. Par le premier théorème d'isomorphisme, nous obtenons que $G/\ker(\varphi) \cong \mathrm{im}(\varphi)$. Mais comme tous les 2-sous-groupes de Sylow sont conjugués, φ n'est pas l'application triviale, ce qui signifie que $\ker(\varphi) \neq G$. Puisque le noyau ne peut pas être trivial (en raison des contraintes de taille), il s'ensuit que $1 \neq \ker(\varphi) \triangleleft G$ est un sous-groupe normal non trivial.