# THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SOLUTIONS 8

**Exercise 1.** À faire vous-même.

**Exercise 2.**
(1) $1 \triangleleft \mathbb{Z}$ est une série sous-normale avec des quotients abéliens ;
(2) $1 \triangleleft \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \triangleleft S_3$ est une série sous-normale avec des quotients abéliens ;
(3) exercice 4 de la semaine dernière ;
(4) exercice 7 de la semaine dernière ;
(5) c'est immédiat par la proposition 26 des notes du cours.

**Exercise 3.** On observe que le groupe dérivé d'un produit de groupes est le produit des groupes dérivés :

$$[H \times G, H \times G] = [H, H] \times [G, G].$$

Avec les notations habituelles, on obtient alors par induction que $(H \times G)^{\{i\}} = H^{\{i\}} \times G^{\{i\}}$ et donc cette suite devient le groupe trivial à l'indice $\max(n, m)$, où $n$ et $m$ sont les indices lorsque $H^{\{i\}}$ et $G^{\{i\}}$ deviennent le groupe trivial, respectivement.

**Exercise 4.**
(1) Notez que la conjugaison par tout élément du groupe $G$ nous donne un automorphisme de $G$. Ainsi, si $H$ est un sous-groupe caractéristique de $G$, alors $gHg^{-1} = H$, pour tout $g \in G$, donc $H$ est normal.
(2) Premièrement, observons que si $\phi$ est un automorphisme de $G$, alors $\phi(Z(G)) \subset Z(G)$. En effet, soit $a \in Z(G)$ et $g \in G$ quelconque. Nous voulons montrer que $\phi(a)g = g\phi(a)$ pour conclure par le choix arbitraire de $a$ et $g$. Comme $\phi$ est un automorphisme, $\phi$ est en particulier surjective et donc il existe $h \in G$ tel que $\phi(h) = g$. On en déduit que $\phi(a)g = \phi(a)\phi(h) = \phi(ah) = \phi(ha) = \phi(h)\phi(a) = g\phi(a)$ et nous avons terminé. Pour l'inclusion réciproque, appliquez le même raisonnement à l'automorphisme inverse $\phi^{-1}$ pour obtenir $Z(G) = \phi(Z(G))$, c'est-à-dire que $Z(G)$ est un sous-groupe caractéristique de $G$.
(3) Encore une fois, observons que si $\phi$ est un automorphisme de $G$, nous avons $\phi([G, G]) \subset [G, G]$. En effet, soit un commutateur $[a, b] \in [G, G]$ et remarquons que $\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)] \in [G, G]$. Comme $\phi^{-1}([G, G])$ est un sous-groupe de $G$ qui contient tous les commutateurs par l'argument précédent, il doit contenir le sous-groupe engendré par ces éléments, c'est-à-dire $[G, G]$, donc $\phi([G, G]) \subset [G, G]$. En appliquant le même raisonnement à l'automorphisme inverse $\phi^{-1}$, nous pouvons conclure.

**Exercise 5.** Puisque $G$ est un $p$-groupe fini, nous savons par le cours que $|G| = p^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Nous prouvons que $G$ est résoluble par induction sur $n$. Si $n = 1$ alors $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

est résoluble. Si $n > 1$ nous savons que le centre $Z(G)$ est non trivial (exercice 2, feuille 4), de sorte que $G/Z(G)$ est un $p$-groupe d'ordre $p^k$ pour un certain $k < n$. Par induction, ce quotient est résoluble. Comme $Z(G)$ est abélien, il est également résoluble. Il s'ensuit que $G$ est résoluble, étant une extension de deux groupes résolubles :

$$1 \to Z(G) \to G \to G/Z(G) \to 1.$$

**Exercise 6.** (1) Comme $G$ est simple, toute série sous-normale de $G$ doit être donnée par $1 \triangleleft G$ et comme $G$ est résoluble, $G/1 \cong G$ doit donc être abélien. Comme $G$ est simple et abélien, $G$ doit être cyclique d'ordre premier.

(2) Par définition, chaque facteur de composition de la série de composition de $G$ est simple. C'est aussi un quotient d'un sous-groupe de $G$, donc il est résoluble et par le point précédent nous en déduisons que chaque facteur doit être isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain nombre premier $p$. Il existe un nombre fini de facteurs de composition, disons $\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$ pour un certain $n$, et donc $|G| = \prod_{i=1}^n p_i$, donc $G$ est fini.

(3) " $\Longleftarrow$ " Trivial, car dans ce cas la série de composition nous dit précisément que $G$ est résoluble.
" $\Longrightarrow$ " Par le même argument utilisé en (2), chacun des facteurs de composition doit être résoluble et simple, donc cyclique d'ordre premier.

**Exercise 7.** Pour montrer que le groupe $B$ des matrices triangulaires supérieures $2 \times 2$ inversibles sur un corps $k$ est résoluble, nous devons construire une série sous-normale pour $B$ où chaque quotient est abélien. Nous définissons un sous-groupe normal $U \triangleleft B$ par

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in k \right\}.$$

Ce sous-groupe $U$ est clairement isomorphe au groupe additif $(k, +)$ qui est abélien. De plus, $U$ est normal dans $B$ par un calcul direct.

Nous affirmons que ce qui suit forme une série sous-normale pour $B$ avec des quotients abéliens :

$$\{I\} \triangleleft U \triangleleft B.$$

Comme $U$ est abélien, nous devons seulement observer que $B/U$ est abélien. Définissez une application $B \to k^\times \times k^\times$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto (a, d).$$

Il s'agit d'un homomorphisme de groupes surjectif dont le noyau est précisément $U$ (ce qui peut être utilisé pour montrer que $U$ est normal sans calculs). Par le théorème du premier isomorphisme, $B/U \cong k^\times \times k^\times$ qui est abélien. Cela conclut la preuve.

**Exercise 8.** (1) Soit $\alpha \in S_n$ un élément non trivial et soit $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k$ sa décomposition en cycles disjoints (non-identité). Écrivons $\alpha_1 = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ avec $m \geq 2$. Si $m \geq 3$, posons $\beta = (a_1, a_2)$ et observons que

$$\alpha^{-1}\beta\alpha = (\alpha(a_1), \alpha(a_2)) = (\alpha_1(a_1), \alpha_1(a_2)) = (a_2, a_3) \neq \beta.$$

Ainsi, $\alpha\beta \neq \beta\alpha$, ce qui prouve que $\alpha$ n'est pas dans le centre de $S_n$. Maintenant, si $m = 2$, le cycle est $\alpha_1 = (a_1, a_2)$, et posons $\beta = (a_1, a_2, a_3)$ pour un certain $a_3 \neq a_1, a_2$. Alors on observe que

$$\alpha^{-1}\beta\alpha = (\alpha(a_1), \alpha(a_2), \alpha(a_3)) = (\alpha_1(a_1), \alpha_1(a_2), \alpha(a_3)) = (a_2, a_1, b)$$

pour $b = \alpha(a_3)$ différent de $a_1$ et $a_2$. Ainsi, $\alpha^{-1}\beta\alpha \neq \beta$, ce qui prouve que $\alpha$ n'est pas dans le centre de $S_n$.

(2) Soit $1 \neq \sigma \in H$ un élément non trivial. Puisque $H \cap A_n = 1$, nous savons que $\sigma$ peut être écrit comme un produit impair de transpositions, donc $\sigma^2 \in A_n$. Étant donné que $\sigma^2 \in H$ également, cela prouve que $\sigma^2 = 1$. Maintenant, si $\tau \in H$ est un autre élément non trivial, il peut également être écrit comme un produit impair de transpositions, donc $\sigma\tau \in A_n$. Cela implique que $\sigma\tau = 1$, donc $\tau = \sigma^{-1} = \sigma$, et ainsi $H = \{1, \sigma\}$.

(3) Comme le centre de $S_n$ est trivial, il existe $\tau \in S_n$ tel que $\tau^{-1}\sigma\tau \neq \sigma$. Mais puisque $H$ est normal dans $S_n$, nous avons que $\tau^{-1}\sigma\tau \in H = \{1, \sigma\}$, et donc $\tau^{-1}\sigma\tau = 1$. Cela implique que $\sigma = 1$, ce qui contredit le fait que $\sigma$ est non trivial.

(4) Puisque $H \triangleleft S_n$, nous avons que $H \cap A_n \triangleleft A_n$. Nous avons vu en classe que $A_n$ est simple, donc soit $H \cap A_n = 1$, soit $H \cap A_n = A_n$. Le premier cas est exclu par les deux points précédents. Dans le second cas, cela implique que $A_n \subseteq H \subset S_n$. Par le théorème de correspondance, $H$ correspond à un sous-groupe de $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comme ce groupe n'a pas de sous-groupe non trivial, nous obtenons que soit $H = A_n$, soit $H = S_n$ comme désiré.