THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SOLUTIONS 7

Exercise 1. À faire vous-même.

Exercise 2. D'après le théorème de correspondance, les sous-groupes normaux de G contenant H sont en bijection avec les sous-groupes normaux de G/H. Cela prouve les deux implications de l'énoncé.

Exercise 3. Une série de composition est donnée par

$$0 = 12\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \trianglelefteq 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \trianglelefteq 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

avec comme facteurs de composition

$$\{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}.$$

La série de composition n'est pas unique, voici par exemple une autre

$$0 = 12\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \trianglelefteq 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \trianglelefteq 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}.$$

Elles ont les mêmes facteurs de composition d'après un théorème du cours.

Exercise 4. Soit $V_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ le groupe de Klein. Remarquons qu'il est précisément le sous-groupe de A_4 formé des éléments d'ordre 2. Puisque pour tout $\sigma \in A_4$ et $x \in V_4$, on a $(\sigma x \sigma^{-1})^2 = 1$, cela prouve que $\sigma x \sigma^{-1}$ a pour ordre 2 et appartient donc à V_4. Ceci montre que V_4 est normal dans A_4. Il en résulte que

$$0 \trianglelefteq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle (12)(34) \rangle \trianglelefteq V_4 \trianglelefteq A_4$$

est une série de composition. Les facteurs de composition sont

$$\{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$$

car ce sont les seuls groupes ayant les cardinalités requises. Puisque $A_4 \trianglelefteq S_4$ est normal, nous pouvons l'étendre en une série de composition

$$0 \trianglelefteq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle (12)(34) \rangle \trianglelefteq V_4 \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$$

avec comme facteurs de composition

$$\{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.$$

Exercise 5. Par les propriétés des produits semi-directs, on a une courte suite exacte

$$1 \to G \to G \rtimes_\varphi H \to H \to 1.$$

Il en résulte de la proposition 22 des notes que les facteurs de composition de $G \rtimes_\varphi H$ sont simplement les facteurs de composition de G et les facteurs de composition de H.

Exercise 6. (1) Par l'exercice 5 de la semaine dernière, nous savons que l'on peut écrire

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2^{a_2}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p_k^{a_k}\mathbb{Z}.$$

Ainsi, une série de composition est donnée par

$$0 \trianglelefteq \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}/p_1^2\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}/p_1^3\mathbb{Z} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z} \trianglelefteq$$
$$\mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2^2\mathbb{Z} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2^{a_2}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p_k^{a_k}\mathbb{Z}$$

qui a pour longueur $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Les facteurs de composition consistent en a_i fois $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la proposition 19 du cours, nous savons que $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a une série de composition

$$0 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_k = G.$$

Puisque G est abélien, il en est de même de ses sous-groupes. Par conséquent, les facteurs de composition G_{i+1}/G_i sont des groupes finis simples abéliens, c'est-à-dire qu'ils sont cycliques d'ordre premier (comme expliqué dans le cours). Il en résulte que

$$\begin{aligned} n = |G| &= |G/G_{k-1}| \times |G_{k-1}| = |G/G_{k-1}| \times |G_{k-1}/G_{k-2}| \times |G_{k-2}| \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} |G_{i+1}/G_i| \end{aligned}$$

qui est un produit de nombres premiers. Par le théorème de Jordan-Hölder, les facteurs de composition G_{i+1}/G_i sont uniques (à permutation près), ce qui montre qu'une telle décomposition de n en produit de nombres premiers est unique.

Exercise 7. D'après l'exercice 7 de la série 4, nous avons un isomorphisme

$$D_{2n} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On obtient donc une suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to D_{2n} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

et ainsi, d'après le cours, nous savons que D_{2n} a une série de composition obtenue en attachant une série de composition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec celle de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'exercice précédent nous donne de telles séries de composition. De plus, l'exercice 5 nous indique que les facteurs de composition sont l'union des facteurs de ces deux groupes.

Exercise 8. Supposons par l'absurde qu'il existe un sous-groupe normal propre $H \trianglelefteq G$. Alors, en posant $G_0 := 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G_n \subseteq H$ et $G_{n+1} \nsubseteq H$. Cependant, on a alors que $G_{n+1} \bigcap H$ est un sous-groupe normal propre de G_{n+1}, ce qui contredit l'hypothèse. Considérons les inclusions $A_5 \subsetneq A_6 \subsetneq \ldots$ des groupes alternés, tous simples. Alors

$$\bar{A} = \bigcup_{i=5}^{\infty} A_i$$

est infini et simple.

Exercise 9. (1) Voir la preuve des propositions $20, 21, 22$ et du théorème de Jordan-Hölder.

(2) On a une suite exacte courte
$$1 \to K \to G \to G/K \to 1$$
D'après le point précédent
$$\text{longueur}(G) = \text{longueur}(K) + \text{longueur}(G/K),$$
mais comme K est un sous-groupe propre de G, G/K n'est pas trivial et a donc une longueur strictement supérieure à 0. Cela implique que $\text{longueur}(G) > \text{longueur}(K)$.

(3) Si l'on a une chaîne stricte
$$1 \trianglelefteq G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \dots$$
composée de sous-groupes normaux de G, on peut appliquer (2) pour obtenir
$$0 < \text{longueur}(G_0) < \text{longueur}(G_1) < \dots$$
Ainsi, toute chaîne de ce type doit être finie et avoir une longueur au plus égale à $\text{longueur}(G) + 1$.

(4) Prouvons chacune des deux implications :

" $\implies$ " Observons que le raisonnement de (3) reste valable, même si les chaînes décrites en (a) et (b) ne sont pas constituées de sous-groupes normaux de G.

" $\impliedby$ " Clairement, G est normal dans G. Si G est simple, nous avons terminé. Sinon, choisissons un sous-groupe normal $H_0 \trianglelefteq G$. Si H_0 est maximal dans G, on s'arrête. Sinon, on continue en itérant ce processus en choisissant à chaque étape un sous-groupe normal H_i de G tel que $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ avec inclusion stricte. Par l'hypothèse (b), ce processus doit se terminer pour un certain H_n, où n est un entier positif. Posons $G_1 = H_n \trianglelefteq G$. On peut vérifier que G_1 est maximal dans G, sinon le processus ci-dessus n'aurait pas terminé. Observons que G_1 est également normal dans G, par construction. On peut donc appliquer de manière inductive le même raisonnement pour obtenir une chaîne normale descendante dans laquelle chaque inclusion est maximale de la forme suivante
$$G \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \dots$$
Par l'hypothèse (a), une telle chaîne doit se stabiliser pour un certain G_n, et par construction des G_i, on doit avoir $G_n = 1$. Nous avons ainsi obtenu une série de composition pour G, donc G est de longueur finie.