THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SOLUTIONS 4

Exercise 1. Supposons que G ne soit pas cyclique.

(1) Soit $G \curvearrowright G$ l'action par conjugaison, définie par $g \cdot x = gxg^{-1}$. L'ensemble $X = G$ est partitionné par ses orbites, qui sont des classes de conjugaison d'éléments. Notez que $x \in Z(G)$ si et seulement si son orbite est triviale puisque $gxg^{-1} = x$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire

$$x \in Z(G) \iff \mathrm{Orb}(x) = x.$$

Ainsi, les éléments du centre définissent leurs propres classes de conjugaison, et donc

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{\text{orbites non triviales}} |\mathrm{Orb}(x)|.$$

Par le théorème orbite-stabilisateur, $|\mathrm{Stab}_G(x)| = p^2/|\mathrm{Orb}(x)|$, ce qui implique que $|\mathrm{Orb}(x)| \in \{p, p^2\}$ pour toutes les orbites non triviales. Par conséquent, en prenant l'équation ci-dessus modulo p, on trouve que $|Z(G)| = 0 \mod p$, ce qui implique que $Z(G)$ est non trivial, comme souhaité.

(2) D'après le dernier point, étant donné que l'ordre d'un sous-groupe doit diviser p^2 et que $Z(G)$ est non trivial, $|Z(G)| \in \{p, p^2\}$. Si c'est p^2, alors G est abélien et nous avons terminé. Supposons donc que $|Z(G)| = p$, alors $|G/Z(G)| = p$, et donc le quotient doit être cyclique, engendré par un élément non trivial. Prenons $a \in G \backslash Z(G)$, tel que $aZ(G)$ engendre $G/Z(G)$ comme expliqué, et prenons deux éléments quelconques $x_1, x_2 \in G$. Il existe $z_1, z_2 \in Z(G)$ tels que $x_1 = a^{k_1}z_1$ et $x_2 = a^{k_2}z_2$. Nous trouvons ainsi que

$$x_1x_2 = a^{k_1}z_1a^{k_2}z_2 = a^{k_2}z_2a^{k_1}z_1 = x_2x_1$$

puisque tous ces éléments commutent entre eux. Ainsi, G est abélien.

(3) Soit $x \in G$ un élément non trivial. Puisque G n'est pas cyclique, il engendre un sous-groupe cyclique $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'ordre p. Choisissons un $y \in G \backslash \langle x \rangle$, qui engendre également un sous-groupe cyclique $\langle y \rangle \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'ordre p tel que $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{0\}$ puisque, sinon, leur intersection (qui est un sous-groupe) serait d'ordre p, ce qui contredirait le fait que $y \notin \langle x \rangle$. Nous construisons un homomorphisme :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\to G \\ ([n], [m]) &\mapsto x^n y^m \end{aligned}$$

Il est clair que cette fonction est bien définie puisque x et y sont d'ordre p. De plus, on peut facilement montrer que c'est un homomorphisme en utilisant le deuxième point. Enfin, il est injectif puisque si $x^ny^m = 0$, alors $x^n \in \langle y \rangle$, et donc $x^n = 0$ puisque $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{0\}$. Cela implique que $n = 0 \mod p$, ce qui implique à son tour que $m = 0 \mod p$ également. Par conséquent, f est un homomorphisme injectif entre deux groupes d'ordre p^2, il est donc un isomorphisme.

Exercise 2. Il est facile de voir que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est trivial, donc le seul tel homomorphisme φ doit également être trivial. Ainsi, le seul produit semi-direct est en fait isomorphe au produit direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Cependant, nous savons que ce groupe et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes, car ce dernier possède un élément d'ordre 4, tandis que le premier n'en a pas.

Exercise 3. *Produit semi-direct interne*

(1) Considérons l'application

$$\alpha : K \rtimes_\varphi L \to G,\ (k,l) \mapsto kl.$$

Nous montrons que α est un isomorphisme de groupes. Notez que pour tout

$$(k_1,l_1),(k_2,l_2) \in K \rtimes_\varphi L,$$

nous avons

$$\alpha((k_1,l_1)\cdot(k_2,l_2)) = \alpha(k_1l_1k_2l_1^{-1}, l_1l_2) = k_1l_1k_2l_2 = \alpha((k_1,l_1))\alpha((k_2,l_2)).$$

Cela montre que α est un homomorphisme de groupes. Il découle de l'hypothèse $KL = G$ que α est surjective. Supposons maintenant que $\alpha((k,l)) = kl = 1$, alors $k = l^{-1}$ donc l'hypothèse $K \cap L = \{1\}$ force $k = l = 1$. Par conséquent, α est également injective et donc un isomorphisme.

(2) Considérons l'élément $g = klk^{-1}l^{-1} \in G$ pour un certain $k \in K$ et $l \in L$. Puisque L est normal, nous avons que $klk^{-1} \in L$ et donc $g \in L$. De même, la normalité de K implique que $g \in K$. Comme $K \cap L$ est trivial, nous obtenons que $g = 1$ et donc $kl = lk$. Il s'ensuit immédiatement que φ est l'homomorphisme trivial.
Notez que si $\varphi : L \to \mathrm{Aut}(K)$ est l'homomorphisme trivial, alors $(k_1,l_1)\cdot(k_2,l_2) = (l_1l_2, k_1k_2)$ pour tout $(k_1,l_1),(k_2,l_2) \in K \rtimes_\varphi L$. Cela implique que la bijection ensembliste $K \times L \to K \rtimes_\varphi L$, $(k,l) \mapsto (k,l)$ est également un homomorphisme de groupes, donc un isomorphisme.

Exercise 4. On vérifie que $K \rtimes_\psi L \to L$, $(k,l) \mapsto l$ est un homomorphisme de groupes avec noyau $K \times \{1\}$. Puisque les noyaux des homomorphismes sont des sous-groupes normaux, nous avons que $K \times \{1\}$ est normal. Il est également clair que $(K \times \{1\}) \cap (\{1\} \times L)$ est l'élément neutre de G et que $(K \times \{1\}) \cdot (\{1\} \times L) = G$. Ainsi, $K \rtimes_\psi L$ est le produit semi-direct interne de $K \times \{1\}$ avec $\{1\} \times L$.

En utilisant la loi du groupe sur $G = K \rtimes_\psi L$, nous avons que

$$(1,l)(k,1)(1,l)^{-1} = (1\cdot\psi_l(k), l)(1,l)^{-1} = (\psi_l(k), l)(1, l^{-1}) = (\psi_l(k)\cdot\psi_l(1), 1) = (\psi_l(k), 1).$$

Cette identité implique que la bijection ensembliste

$$K \rtimes_\psi L \to (K \times \{1\}) \rtimes_\varphi (\{1\} \times L),\ (k,l) \mapsto ((k,1),(1,l))$$

est un homomorphisme de groupes et donc un isomorphisme.

Exercise 5. Appliquer l'exercice sur le produit semi-direct interne avec $K = \langle (123) \rangle \trianglelefteq S_3$ et $L = \langle (12) \rangle$ (vérifiez que toutes les conditions sont satisfaites !).

Exercise 6. (1) Commençons par trouver $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$: nous savons que ces automorphismes correspondent à des choix d'éléments d'ordre 4 dans le codomaine, donc $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})| = 2$, et ainsi $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Maintenant, les homomorphismes $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ correspondent à des choix d'éléments de torsion d'ordre 2 dans le codomaine, et il y en a exactement 2 : l'identité et le morphisme nul.

(2) Comme nous l'avons vu, le morphisme nul nous donne le produit direct $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le morphisme "identité" du point (1) est explicitement donné par

$$\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$$
$$1 \mapsto \cdot 3$$

où $\cdot 3 : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est la multiplication par 3. Ainsi, la structure de groupe de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est donnée par $(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, 0)$ et $(a, 1) \cdot (c, d) = (3ac, d)$.

(3) Ce dernier, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, est effectivement isomorphe à D_8. Voir (4).

(4) Rappelez-vous de l'exercice sur le produit semi-direct interne. Définissons $K = \langle \sigma \rangle$, où σ est la rotation du n-gone régulier, et $L = \langle \tau \rangle$, où τ est la réflexion. Du fait qu'il a un indice 2, nous savons que K est normal dans D_{2n} (voir la série 3). De plus, $K \bigcap L = \{\mathrm{id}\}$ et $KL = D_{2n}$ (vérifiez cela !). Nous en déduisons que $D_{2n} \cong K \rtimes_\varphi L$. Observons que K est cyclique d'ordre n, donc $K \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, tandis que L est d'ordre 2, donc $L \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En analysant la manière dont les groupes sont identifiés via ces isomorphismes, nous pouvons voir que $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ correspond à $1 \mapsto \cdot(-1)$, où $\cdot(-1) : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la multiplication par (-1). Nous avons ainsi trouvé notre φ désiré.

Exercise 7. Considérons

$$\phi : F^\times \to \mathrm{GL}_n(F) : a \mapsto M_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $M_a = \mathrm{Diag}(a, 1, 1, 1....)$. On vérifie facilement que ϕ est un homomorphisme de groupes et que $\det \circ \phi = \mathrm{id}_{F^\times}$. Par conséquent, la suite exacte courte suivante est scindée à droite

$$1 \to \mathrm{SL}_n(F) \xrightarrow{i} \mathrm{GL}_n(F) \xrightarrow{\det} F^\times \to 1.$$

En utilisant la Proposition 10 du cours 4, cela montre que

$$\mathrm{GL}_n(F) \cong \mathrm{SL}_n(F) \rtimes_\varphi F^\times$$

où $\varphi : F^\times \to \mathrm{Aut}(\mathrm{SL}_n(F))$ est donnée par l'action

$$a \cdot M = M_a M M_a^{-1}.$$