THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SOLUTIONS 3

Exercise 1. *Sous-groupes normaux et quotients de groupes*
Voir les notes de cours Structures algébriques.

Exercise 2. *Premier théorème d'isomorphisme*
Voir les notes de cours Structures algébriques.

Exercise 3. *Théorème de correspondance et troisième théorème d'isomorphisme*
Voir les notes de cours Structures algébriques.

Exercise 4. *Deuxième théorème d'isomorphisme*
Voir les notes de cours Structures algébriques.

Exercise 5. *Équivalence des définitions des actions de groupe : Très important ! À retenir et utiliser en pratique !*
Nous construisons une application

$$f : \{\Phi : G \to \mathrm{Bij}(X) \mid \Phi \text{ est une action}\} \cong \{\cdot : G \times X \to X | \text{ (1) \& (2) tiennent}\}$$

donnée par

$$f : \Phi \mapsto \cdot_\Phi$$

où $\cdot_\Phi : G \times X \to X$ est donnée par $g \cdot_\Phi x = \Phi(g)(x)$. Vérifions que cette application est bien définie, c'est-à-dire que $\cdot_\Phi$ satisfait (1) et (2) :

(1) $e_G \cdot_\Phi x = \Phi(e_G)(x) = x$, pour tout $x \in X$, par le fait que Φ est une action.
(2) $g \cdot_\Phi (h \cdot_\Phi x) = g \cdot_\Phi \Phi(h)(x) = \Phi(g)(\Phi(h)(x)) = \Phi(gh)(x) = (gh) \cdot_\Phi x$, pour tous $g, h \in G$ et $x \in X$, encore une fois parce que Φ est une action.

De la même manière, nous construisons maintenant une application dans l'autre sens

$$g : \{\cdot : G \times X \to X | \text{ (1) \& (2) tiennent}\} \cong \{\Phi : G \to \mathrm{Bij}(X) \mid \Phi \text{ est une action}\}$$

donnée par

$$\cdot \mapsto \Phi.$$

où $\Phi. : G \to \mathrm{Bij}(X)$ est donnée par $\Phi.(g)(x) = g \cdot x$. Vérifions que cette application est bien définie, c'est-à-dire que $\Phi.$ est une action. D'après les notes de cours, il suffit de prouver la multiplicativité et que chaque $\Phi.(g) : X \to X$ est une bijection :

(1) La multiplicativité découle de celle de $\cdot$: $\Phi.(gh)(x) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = \Phi.(g)(\Phi.(h)(x))$ pour tous $g, h \in G$ et $x \in X$, donc $\Phi.(gh) = \Phi.(g) \circ \Phi.(h)$.

(2) Montrons que pour tout $g \in G$, $\Phi.(g)$ est une bijection. Pour la surjectivité, prenons $x \in X$ arbitrairement. Alors $\Phi.(g)(g^{-1} \cdot x) = g \cdot (g^{-1} \cdot x) = (g \cdot g^{-1}) \cdot x = e_G \cdot x = x$. Pour l'injectivité, prenons $x, y \in X$ avec $g \cdot x = \Phi.(g)(x) = \Phi.(g)(y) = g \cdot y$. En prenant $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot (g \cdot y)$, on obtient $x = y$.

Il est facile de vérifier que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont les identités sur les ensembles respectifs, nous avons donc la bijection désirée.

Exercise 6. Pour prouver que l'action $\Phi : G \to \mathrm{Bij}(G/H)$ donnée par $\Phi_g(aH) = gaH$ n'est pas fidèle, nous devons trouver $g \neq g' \in G$ tels que $\Phi_g = \Phi_{g'}$. Comme H a au moins deux éléments, prenons g et g' comme étant deux éléments différents de H. Montrons que $\Phi_g(aH) = \Phi_{g'}(aH)$, pour tout $a \in G$. Observons que $\Phi_g(aH) = \Phi_{g'}(aH) \iff gaH = g'aH \iff a^{-1}g'^{-1}ga \in H$, mais cela est vrai pour tout $a \in G$, car $g'^{-1}g \in H$ par construction et H est normal.

Exercise 7. Soit $g \in G$, il est clair que si $g \in H$ alors $gHg^{-1} = H$. Si $g \notin H$, alors puisque l'indice de H dans G est deux, nous avons que

$$G/H = \{H, gH\} \text{ et } H\backslash G = \{H, Hg\}.$$

Cela implique que $gH = Hg$ en tant qu'ensembles. Il en découle que $gHg^{-1} = H$.

Exercise 8. *Quelques propriétés des classes utiles en pratique*

(1) Nous avons les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} gH = g'H &\iff \exists h \in H \text{ tel que } g' = gh \\ &\iff \exists h \in H \text{ tel que } g^{-1}g' = h \\ &\iff g^{-1}g' \in H. \end{aligned}$$

(2) Vous avez montré en cours que les classes forment une partition de G, elles doivent donc coïncider ou être disjointes.

(3) Supposons que $gH \cap g'K \neq \emptyset$. Cela signifie qu'il existe un élément $x \in G$ tel que $x \in gH$ et $x \in g'K$. Ainsi, nous avons

$$x = gh_1 = g'k_1$$

pour certains $h_1 \in H$ et $k_1 \in K$. En réarrangeant cette équation, nous obtenons

$$g^{-1}g' = h_1k_1^{-1}. \tag{1}$$

Nous allons montrer par double inclusion que $gH \cap g'K = gh_1(H \cap K)$. Supposons d'abord que $y \in gH \cap g'K$. Nous pouvons écrire

$$y = gh_2 = g'k_2$$

pour certains $h_2 \in H$ et $k_2 \in K$. En réarrangeant l'équation et en utilisant (1), nous obtenons

$$h_2 = g^{-1}g'k_2 = (h_1k_1^{-1})k_2.$$

De là, nous pouvons déduire que $h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2 \in K \cap H$. Ainsi, nous pouvons écrire

$$y = gh_2 = gh_1(k_1^{-1}k_2) \in gh_1(K \cap H).$$

Cela prouve la première inclusion. La deuxième inclusion est directe.

Exercise 9. (1) Soit $\varphi : X \to Y$ un isomorphisme de G-ensembles. Supposons que X soit transitif. Soient $y_1, y_2 \in Y$. Comme φ est une bijection, il existe $x_1, x_2 \in X$ tels que $\varphi(x_1) = y_1$ et $\varphi(x_2) = y_2$. Comme X est transitif, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x_1 = x_2$. En appliquant l'isomorphisme φ des deux côtés, on obtient

$$g \cdot y_1 = g \cdot \varphi(x_1) = \varphi(g \cdot x_1) = \varphi(x_2) = y_2.$$

Ainsi, Y est transitif. Si Y est transitif, montrez que $\varphi^{-1} : Y \to X$ est un morphisme de G-ensembles et appliquez le même raisonnement à φ^{-1} pour montrer que X est transitif.

(2) Immédiat.

(3) Nous construisons une fonction

$$\begin{aligned} \{\text{Classes de conjugaison de sous-groupes } H \leq G\} &\to \mathcal{X}/\sim \\ [H] &\mapsto [G/H] \end{aligned}$$

où G/H est muni de l'action habituelle de G. Cette action est clairement transitive. De plus, cette application est bien définie car si $[H] = [H']$, c'est-à-dire que H et H' sont conjugués, alors les deux G-ensembles G/H et G/H' sont isomorphes d'après l'exercice 3 de la semaine 2. Par conséquent, ils appartiennent à la même classe d'isomorphisme et définissent ainsi le même élément $[G/H] = [G/H']$ de $\mathcal{X}/\sim$.

Nous montrons que cette fonction est bijective. Elle est injective car si H et H' sont des sous-groupes tels que G/H et G/H' sont isomorphes en tant que G-ensembles, alors H et H' sont conjugués d'après l'exercice 3 de la semaine 2.

Pour montrer qu'elle est surjective, soit $G \curvearrowright X$ un G-ensemble transitif. Choisissez un point $x \in X$ et considérez son stabilisateur $H = \mathrm{Stab}_G(x)$. Par le théorème orbite-stabilisateur, il existe une bijection entre X et G/H donnée par

$$\begin{aligned} f : G/H &\to X \\ gH &\mapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

Cette application est G-équivariante car

$$f(a \cdot gH) = f(agH) = ag \cdot x = a \cdot (g \cdot x) = a \cdot f(gH)$$

et donc $G/H \cong X$ en tant que G-ensembles. Par conséquent, tout G-ensemble transitif est isomorphe à G/H pour un certain sous-groupe H de G. Cela montre la surjectivité.

(4) (a) $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Ses sous-groupes sont

- $\langle 0 \rangle$ (sous-groupe trivial)
- $\langle 2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Aucun de ces sous-groupes n'est conjugué (car $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est abélien), donc nous avons trois classes de conjugaison distinctes. Ainsi, il y a trois classes d'isomorphisme d'actions transitives de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(b) $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Ses sous-groupes sont
- $\langle 0 \rangle$
- $\langle 4 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- $\langle 2 \rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Encore une fois, aucun de ces sous-groupes n'est conjugué, donc il y a quatre classes d'isomorphisme distinctes d'actions transitives de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

(c) $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ses sous-groupes sont
- $\langle (0,0) \rangle$ (sous-groupe trivial)
- $\langle (1,0) \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- $\langle (0,1) \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- $\langle (1,1) \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Tous ces sous-groupes sont distincts et non conjugués (car $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est abélien), donc il y a cinq classes d'isomorphisme distinctes d'actions transitives.

(d) $G = S_3$. Ses sous-groupes sont
- $\langle e \rangle$ (sous-groupe trivial)
- Trois sous-groupes isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (générés par des transpositions)
- $\langle (123) \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
- S_3.

Les trois sous-groupes isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont conjugués entre eux, et les autres ne le sont pas. Par conséquent, nous avons quatre classes d'isomorphisme distinctes d'actions transitives de S_3.