THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, FEUILLE DE SOLUTIONS 13

Exercise 1. À faire vous-même.

Exercise 2. (1) Pour chaque k-espace vectoriel V, il existe une représentation $G \curvearrowright V$ unique, car il existe un homomorphisme unique $G \to \mathrm{GL}(V)$.

(2) Soit $G \curvearrowright V$ une représentation de dimension 1. Puisque V n'a pas de sous-espace propre, elle ne peut pas avoir de sous-représentation propre.

(3) L'action triviale de G sur $\mathbb{C}$ est irréductible d'après le point 2).

Exercise 3. Supposons que V soit irréductible. Puisque $\langle G\cdot v\rangle_{\mathbb{C}} \subseteq V$ est une sous-représentation, elle doit être soit triviale, soit égale à V. Elle ne peut pas être triviale car $0 \neq v \in \langle G \cdot v\rangle_{\mathbb{C}}$, donc on doit avoir $\langle G \cdot v\rangle_{\mathbb{C}} = V$.

Inversement, si V n'est pas irréductible, il existe une sous-représentation propre $W \subset V$. Pour tout $w \neq 0 \in W$, on a $\{0\} \neq \langle G \cdot w\rangle_{\mathbb{C}} \subseteq W \subsetneq V$.

Exercise 4. (1) Soit V l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ ayant pour base G (comme ensemble). En particulier $\dim V = |G|$. Considérons la représentation $G \curvearrowright V$ définie par :

$$g \in G \mapsto \Phi_g : V \to V$$

donnée sur les éléments de la base par $\Phi_g(h) = gh$ pour tout $h \in G$. Comme Φ_g est une bijection sur la base G, c'est un automorphisme linéaire comme désiré. Il est immédiat de vérifier que cela définit effectivement une représentation de V. De plus, $\Phi_g = \mathrm{Id}_V$ si et seulement si $g = 1 \in G$ est l'élément neutre, ce qui montre que

$$G \to \mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_{|G|}(\mathbb{C})$$

est injective.

Cette représentation est appelée la représentation par permutations de G.

(2) Fixons un vecteur $v \neq 0 \in V$. Il suffit de remarquer que l'ensemble $\{g \cdot v | g \in G\} \subset V$ engendre l'espace vectoriel $\langle G \cdot v\rangle_{\mathbb{C}} = V$, ce qui permet de conclure que

$$\dim V = \dim\langle G \cdot v\rangle_{\mathbb{C}} \leq |\{g \cdot v | g \in G\}| \leq |G|.$$

Exercise 5. (1) Soit $\rho : S_n \to GL(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$ une représentation unidimensionnelle de S_n. Si τ est une transposition, alors $\mathrm{id} = \rho(\mathrm{id}) = \rho(\tau^2) = \rho(\tau)^2$, donc $\rho(\tau) = \pm 1$. Comme $\mathbb{C}^\times$ est un groupe commutatif, $\rho(ghg^{-1}) = \rho(h)$ pour tous $g, h \in S_n$. En particulier, comme toutes les transpositions sont conjuguées, elles sont toutes envoyées sur 1 ou -1. Tous les éléments de S_n peuvent être écrits comme un produit de transpositions (nombre pair ou impair selon leur signature), donc si toutes les transpositions sont envoyées sur

1, alors ρ est la représentation triviale, et si elles sont envoyées sur -1, alors ρ est la représentation signature, c'est-à-dire $\rho = \mathrm{sgn}$.

(2) (a) Une base de V est donnée par $\{e_1 - e_n, e_2 - e_n, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$. En effet, tous ces éléments appartiennent à V. Si $(x_1, \ldots, x_n) \in V$, alors $x_n = -\sum_{i<n} x_i$, donc on peut écrire $(x_1, \ldots, x_n) = x_1(e_1 - e_n) + x_2(e_2 - e_n) + \ldots + x_{n-1}(e_{n-1} - e_n)$, donc la famille est génératrice. On peut facilement vérifier qu'elle est libre dans $\mathbb{C}^n$, donc c'est une base.

(b) Soit $\rho : S_n \to \mathrm{GL}(V)$ la représentation définie par

$$\rho(\sigma)(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Il est clair que $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \in V$, car nous avons simplement permuté les mêmes coefficients. (Vérifiez vous-même que c'est bien un morphisme de groupes !)

(c) Nous allons utiliser l'exercice 3. Prenons $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$. Supposons sans perte de généralité que $v_1 \neq v_2$. Observons que $(12) \cdot v - v = (v_2 - v_1)(e_1 - e_2)$. Par conséquent, $e_1 - e_2 \in \langle S_n \cdot v \rangle_{\mathbb{C}}$. En agissant par des permutations adaptées sur $e_1 - e_2$, on peut obtenir tous les éléments de la base ci-dessus, donc on conclut que $\langle S_n \cdot v \rangle_{\mathbb{C}} = V$.

Exercise 6. (1) Soient $g, h \in G$ et $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ arbitraire. Alors

$$((gh) \cdot T)(v) = (gh) \cdot (T((gh)^{-1} \cdot v))$$

D'autre part

$$g \cdot (h \cdot T)(v) = g \cdot ((h \cdot T)(h^{-1}v)) = g \cdot ((h \cdot T)(h^{-1} \cdot)(g^{-1}v)) = (gh)T(h^{-1}g^{-1}v)$$

donc le résultat est prouvé.

(2) Montrons cela par double inclusion. Prenons $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, W)$ arbitraire. On sait que T commute avec l'action de tout élément de G, donc

$$(g \cdot T)(v) = g \cdot T(g^{-1}v) = g \cdot g^{-1} \cdot T(v) = T(v),$$

c'est-à-dire $g \cdot T = T$ pour tout $g \in G$, donc $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G$.

Maintenant, prenons $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G$ arbitraire. Alors

$$T(g \cdot v) = (g \cdot T)(g \cdot v) = g \cdot (T(g^{-1}gv)) = g \cdot (T(v)) = g \cdot T(v).$$

Comme le choix de $g \in G$ et $v \in V$ est arbitraire, on a $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, W)$, et le résultat est prouvé.

Exercise 7. (1) Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation irréductible de G sur $\mathbb{C}$. Comme G est abélien, pour tout $g \in G$, $\rho(g) : V \to V$ est un entrelacement, donc d'après le lemme de Schur, $\rho(g)$ est un opérateur scalaire. En particulier, tout sous-espace vectoriel de V est fixé par l'action de tous les éléments de G. Comme V est irréductible, tous ces sous-espaces fixes doivent être triviaux, donc égaux à 0 ou V. Par conséquent, V doit être de dimension 1.

(2) D'après le point précédent, toutes les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ doivent être de dimension 1. Cherchons donc des morphismes de groupes

$$\rho : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to GL(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times.$$

Clairement, un tel morphisme est entièrement déterminé par un élément $\rho([1]) \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\rho([1])^n = 1$. Ainsi, on établit une correspondance entre les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et les racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.