THÉORIE DES GROUPES 2024-25, SOLUTIONS 12

Exercise 1. À faire vous-même.

Exercise 2. Soit g le morphisme $G \to F$ dans la suite exacte courte. Soit $A \subset F$ un ensemble de générateurs de F, c'est-à-dire $F \cong \langle A \rangle$. Pour chaque $a_\alpha \in A$, soit $b_\alpha \in G$ une préimage arbitraire de a_α par g (on peut toujours trouver au moins une telle préimage, car g est surjective). Considérons l'application $\varphi : A \to G$ définie par $a_\alpha \mapsto b_\alpha$. Comme F est libre avec des générateurs dans A, φ induit un homomorphisme de groupes $\varphi : F \to G$. Il est clair que la composition $g \circ \varphi$ fixe tous les générateurs de F, et encore par la propriété universelle, nous concluons que cette application doit être l'identité sur F, c'est-à-dire que g scinde.

Exercise 3. Pour prouver que F est sans torsion, nous observons que tout élément de F peut s'écrire sous la forme $\alpha\beta\alpha^{-1}$, où β est un mot réduit cycliquement, c'est-à-dire que si $\beta = s_1 \cdots s_n$, alors $s_1 \neq s_n^{-1}$. Pour tout $m > 0$, nous avons

$$(\alpha\beta\alpha^{-1})^m = \alpha\beta^m\alpha^{-1},$$

et comme β est réduit cycliquement, aucune annulation ne peut se produire à l'intérieur de β^m. Ainsi, si $\alpha\beta\alpha^{-1}$ était non trivial, alors $(\alpha\beta\alpha^{-1})^m$ reste non trivial pour tout $m > 0$, ce qui prouve que F est sans torsion.

Maintenant, soit $a \in F \setminus \{1\}$ et notons par x la dernière lettre (élément de S) de la forme réduite de a. Comme $|S| \geq 2$, nous pouvons choisir $y \in S$ différent de x. Il est alors facile de vérifier que $ay \neq ya$, donc a n'appartient pas au centre de F. Par le choix arbitraire de a, nous concluons que le centre est trivial.

Exercise 4. Considérons l'application $\varphi : X \cup Y \to F_X$ définie par l'identité sur X et envoyant les éléments de Y sur le mot vide. Elle induit un homomorphisme de groupes surjectif

$$\varphi : F_{X \cup Y} \to F_X.$$

Montrons que son noyau est le sous-groupe normal engendré par Y pour conclure par le premier théorème d'isomorphisme.

Le sous-groupe normal engendré par Y est évidemment contenu dans $\ker \varphi$, car φ envoie les générateurs venant de Y sur le mot vide.

Maintenant, soit a un élément de $\ker \varphi$, et écrivons $a = X_1 Y_2 X_2 \dots X_n Y_n$, où X_i sont des éléments de F_X et Y_i sont des éléments de F_Y (éventuellement 1). Alors

$$1 = \varphi(a) = X_1 X_2 \dots X_n,$$

et nous devons donc avoir $X_n = X_{n-1}^{-1} \dots X_1^{-1}$. Ainsi

$$a = X_1 Y_1 \dots X_{n-1} Y_{n-1} (X_{n-1}^{-1} \dots X_1^{-1}) Y_n = X_1 (Y_1 X_2 (\dots) X_2^{-1}) X_1^{-1} Y_n,$$

ce qui est clairement un élément du sous-groupe normal engendré par Y, donc c'est terminé.

Exercise 5. (1) Puisque $i^2 = j^2 = k^2$, nous avons $-1 = i^2$, qui commute avec les générateurs i, j et k. Ainsi $-1 \in Z(Q_8)$.

(2) En utilisant les relations, observez que

$$ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ij = -ji, jk = -kj, ki = -ki.$$

En utilisant cela, tout mot en i, j et k peut être écrit comme un élément de l'ensemble $\{\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k\}$. Par conséquent, $|Q_8| = 8$.

(3) Dans la dernière partie, nous avons montré que $Q_8 = \{\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k\}$. En utilisant les identités des produits d'éléments écrites dans la dernière partie, il s'ensuit que les seuls éléments centraux sont 1 et -1. Ainsi $Z(Q_8) = \{-1, 1\}$.

(4) Si H est un sous-groupe non trivial et propre de Q_8, alors il est d'ordre 2 ou 4. Puisque l'indice d'un sous-groupe d'ordre 4 de Q_8 est 2, il serait normal. Maintenant, notez que -1 est le seul élément de Q_8 d'ordre 2. Ainsi, le seul sous-groupe d'ordre 2 de Q_8 est $\{1, -1\}$, qui est le centre et donc normal.

Exercise 6. Pour cet exercice, nous utiliserons à plusieurs reprises la proposition 27 : le sous-groupe des commutateurs $[G, G] \lhd G$ est normal dans G, et pour tout autre sous-groupe normal $H \lhd G$ tel que le quotient G/H soit abélien, nous avons $[G, G] \lhd H$.

(1) Le groupe A_n est simple et non abélien pour tout $n \geq 5$, ce qui implique que $[A_n, A_n] = A_n$ et $A_n^{ab} = 1$.

(2) Nous savons que $V_4 \lhd A_4$ est un sous-groupe normal tel que A_4/V_4 est abélien (d'ordre 3). Ainsi, $[A_4, A_4] \lhd V_4$. Le sous-groupe des commutateurs ne peut pas être trivial puisque A_4 n'est pas abélien. Il ne peut pas être d'ordre 2 puisque A_4 n'a pas de sous-groupe normal d'ordre 2 (car le centre de A_4 n'a pas d'élément d'ordre 2). Donc $[A_4, A_4] = V_4$ et $A_4^{ab} = A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(3) Nous savons que $A_n \lhd S_n$ avec un quotient abélien. Comme A_n est simple et S_n n'est pas abélien, nous devons avoir $[S_n, S_n] = A_n$. Il s'ensuit que $S_n^{ab} = S_n/A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(4) Nous avons vu en cours que $F_S^{ab} = F_S/[F_S, F_S] = \mathbb{Z}^S = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

(5) À partir de la première relation, nous observons que $a^2 = b^{-3}$. En substituant dans la seconde relation, il en résulte que $1 = a^4 b^5 = (b^{-3})^2 b^5 = b^{-6+5} = b^{-1}$, ce qui signifie que $b = 1$. Cela implique que le groupe admet la présentation $\langle a | a^2 \rangle$, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. C'est sa propre abélianisation.

Exercise 7. Nous écrivons G pour le groupe défini par les présentations de chaque point.

(1) Puisque les deux générateurs sont d'ordre 2, la dernière relation implique que

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba.$$

Cela montre que G est abélien avec deux générateurs d'ordre 2, c'est-à-dire

$$G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

(2) Soit $S = \{a, b\}$ et soit $f : F_S \to A_4$ l'unique homomorphisme de groupes tel que $f(a) = (123)$ et $f(b) = (234)$, donné par le lemme 16. Comme A_4 est engendré par ces deux 3-cycles (vous pouvez le vérifier à la main), nous avons $F_S/\ker(f) \cong A_4$. Soit $N \triangleleft F_S$ le sous-groupe normal engendré par $R = \{a^3, b^3, (ab)^2\}$. Comme ces relations sont satisfaites par leur image par f dans A_4, nous obtenons $N \subset \ker(f)$. Par définition, $G = F_S/N$, donc par le théorème de correspondance,

$$G/\pi(\ker(f)) \cong (F_S/N)/\ker(f)/N) \cong F_S/\ker(f) \cong A_4.$$

Cela signifie que A_4 est un quotient de G. Si nous montrons que G contient au plus 23 éléments, alors $|G| = 12$ et $G = A_4$. Nous proposons deux solutions pour compter le nombre d'éléments dans G.

(a) En utilisant les relations, observez que $a' := ab$ et $b' := ba$ satisfont les relations $a'^2 = b'^2 = (a'b')^2 = 1$. Par le point précédent, ces deux éléments engendrent une copie de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans G. En utilisant $ab = b^2a^2$, nous trouvons que

$$\begin{aligned}
aa'a^{-1} &= aa'a^2 = aaba^2 = ab^2a^2a^2 = a'b' \in \langle a', b' \rangle \leq G \\
ba'b^{-1} &= bab^3 = b' \in \langle a', b' \rangle \leq G \\
ab'a^{-1} &= a' \in \langle a', b' \rangle \leq G \\
bb'b^{-1} &= b'a' \in \langle a', b' \rangle \leq G
\end{aligned}$$

Cela montre que $\langle a', b' \rangle \triangleleft G$ est un sous-groupe normal. Considérons le sous-groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \langle a \rangle \leq G$. Il s'ensuit que

(i) $\langle a', b' \rangle \triangleleft G$
(ii) $\langle a \rangle \cap \langle a', b' \rangle = 1$;
(iii) $\langle a \rangle \cdot \langle a', b' \rangle = G$, car $b = b'a^2$, donc ce produit de sous-groupes contient les générateurs de G ;

Ainsi, G est un produit semi-direct interne de $\langle a', b' \rangle$ avec $\langle a \rangle$, et donc G est d'ordre $|\langle a', b' \rangle| \cdot |\langle a \rangle| = 4 \cdot 3 = 12$.

(b) En utilisant les deux premières relations, nous observons que les éléments de G sont des mots alternant entre a ou a^2 et b ou b^2. Comme $(ab)^2 = 1$, nous en déduisons que $bab = a^2$ et $aba = b^2$. Nous comptons le nombre de mots commençant par a de la forme $a^{k_1}b^{k_2}a^{k_3}b^{k_4}\dots a^{k_r}$ en fonction de leur longueur r. Il existe deux mots différents de longueur 1. Il existe au plus quatre mots différents de longueur 2, de la forme $a^{k_1}b^{k_2}$. Par les relations ci-dessus, les chaînes contenant uniquement des a et des b (d'exposant 1) peuvent être réduites à des mots de longueur 1 ou 2. Ainsi, les chaînes de longueur 3 doivent contenir une puissance de 2 au milieu. Comme $b^2a^2 = ab$, les chaînes de longueur 3 sont de la forme ab^2a ou a^2b^2a. Par un raisonnement similaire, chaque chaîne de longueur 4 peut être réduite à une longueur plus courte. Par conséquent, il existe au plus 10 mots commençant par a. Un argument similaire montre la même chose pour les mots commençant par b. Nous concluons que le nombre d'éléments dans G est borné par 23, comme souhaité.

(3) A_5 est un groupe simple d'ordre 60, donc il n'a pas de groupe d'ordre 30. Soit $\sigma = (12345)$ et $\tau = (12)(34)$. Si nous montrons que $\langle \sigma, \tau \rangle$ contient au moins 16 éléments, cela prouvera

que $A_5 = \langle \sigma, \tau \rangle$. Nous avons

$$\begin{aligned} \tau\sigma\tau^{-1} &= (21435) \\ \sigma\tau &= (135) \\ \tau\sigma &= (245) \\ \sigma^2\tau &= (14523). \end{aligned}$$

Les trois 5-cycles engendrent des sous-groupes d'ordre 5 qui s'intersectent trivialement, donc ils engendrent $4 \cdot 3 + 1 = 13$ éléments distincts de A_5. Les deux 3-cycles engendrent 4 éléments distincts supplémentaires, et donc $\langle \sigma, \tau \rangle$ contient au moins 17 éléments, comme souhaité.

(4) Supposons que F_S soit résoluble. Choisissons deux générateurs distincts $a, b \in S$ et soit $R = S \backslash \{a, b\}$. Nous obtenons que $F_S/R = \langle S | R \rangle = \langle a, b | \rangle = F_{\{a,b\}}$ est un groupe libre engendré par deux éléments (exercice 4). Nous avons observé au point précédent que A_5 peut être engendré par deux éléments, disons $\alpha, \beta \in A_5$. La propriété universelle des groupes libres nous dit qu'il existe un unique homomorphisme de groupes $f : F_{\{a,b\}} \to A_5$ tel que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. Comme ces éléments engendrent A_5, nous obtenons que f est surjectif et donc $A_5 \cong F_{\{a,b\}}/\ker(f)$. Comme les quotients de groupes résolubles sont résolubles, cela impliquerait que A_5 est résoluble. C'est une contradiction car A_5 est simple.