THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SOLUTIONS 11

Exercise 1. À faire vous-même.

Exercise 2. Soit $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_{k-1} \lhd G_k = G$ une série centrale pour G. Supposons $G_1 \neq 1$, sinon, retirez le groupe de la chaîne jusqu'à ce que cette condition soit satisfaite. Cette chaîne étant une série centrale implique que

$$1 \neq G_1 = G_1/G_0 \leq Z(G/G_0) = Z(G).$$

En particulier, G a un centre non trivial.

Exercise 3. Sous l'hypothèse que H est normal, nous avons que $[G, H]$ est un sous-groupe normal de G. Par minimalité, il doit être soit égal à 1, soit à H lui-même. S'il est égal à 1, alors le résultat est prouvé. Sinon, nous pouvons montrer par induction que

$$[G, [G, \ldots [G, H] \ldots]] = H.$$

Cependant, ce groupe de commutateurs est toujours contenu dans un certain $G^{\{i\}}$, et doit donc finir par être égal à 1, ce qui contredit l'hypothèse.

Exercise 4. (1) Pour $n \geq 3$, le centre $Z(S_n) = 1$ est trivial, donc S_n ne peut pas être nilpotent d'après le premier exercice. S_1 et S_2 sont abéliens, donc nilpotents.

(2) Commençons par quelques observations préliminaires. Tout d'abord, rappelez-vous que le centre du groupe diédral est donné par

$$Z(D_{2n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair ;} \\ \langle r^{n/2} \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n = 2k \text{ est pair ;} \end{cases}$$

où r est la rotation d'ordre n. Vous avez vu cela dans le cours Structures algébriques, vous êtes invités à le démontrer à nouveau si vous ne vous en souvenez pas. Par le premier exercice, nous savons que si le centre est trivial, alors le groupe ne peut pas être nilpotent. Ensuite, lorsque $n = 2k$ est pair, nous observons que

$$D_{2\cdot(2k)}/Z(D_{2\cdot(2k)}) \cong D_{2k}.$$

Pour le prouver, souvenez-vous que

$$D_{2n} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \tag{1}$$

où l'action est donnée par $b \cdot a = ba$ pour tout $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $b \in \{-1, 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Vous pouvez facilement vérifier à la main que

$$\psi : D_{2\cdot(2k)} = \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = D_{2k}$$
$$(a, b) \mapsto (2a, b)$$

définit un homomorphisme de groupes surjectif. Nous remarquons que le noyau de cette application est $\ker(\psi) = \langle (k,0) \rangle \times_\varphi \{1\}$, ce qui correspond à $\langle r^k \rangle = Z(D_{2n})$ via l'isomorphisme (1). Par le premier théorème d'isomorphisme, nous obtenons que

$$D_{2n}/Z(D_{2n}) \cong D_n$$

comme désiré.

Nous sommes maintenant prêts à prouver que D_{2n} est nilpotent si et seulement si $n = 2^k$ pour un certain k.

($\Longrightarrow$) : Supposons que D_{2n} est nilpotent. Par ce qui précède, nous savons qu'il a un centre non trivial, ce qui implique que $n = 2k_1$ est pair. Comme le quotient d'un groupe nilpotent est nilpotent, son quotient $D_{2k_1} = D_{2n}/Z(D_{2n})$ est également nilpotent. Nous pouvons répéter le même argument pour obtenir que $k_1 = 2k_2$ doit aussi être pair, de sorte que $n = 2^2 k_2$. Ce processus doit se terminer après un nombre fini d'étapes, ce qui montre que $n = 2^k$ pour un entier k.

($\Longleftarrow$) : Nous prouvons par induction que $D_{2\cdot 2^k}$ est nilpotent. Pour $k = 0$, le résultat est clair. Supposons que $D_{2\cdot 2^{k-1}}$ est nilpotent. Par ce qui précède, le centre est non trivial et nous avons une suite exacte courte

$$1 \to Z(D_{2\cdot 2^k}) \to D_{2\cdot 2^k} \to D_{2\cdot 2^{k-1}} \to 1.$$

Nous concluons en utilisant l'hypothèse d'induction et le Théorème 38.

Exercise 5. Si G est nilpotent, alors par la propriété des normalisateurs, nous déduisons directement que chaque sous-groupe maximal de G est normal dans G.

Réciproquement, soit P un p-sous-groupe de Sylow de G. Si P n'est pas normal dans G, soit M un sous-groupe maximal contenant son normalisateur (remarquez que nous pouvons choisir un tel sous-groupe car G est fini). Par hypothèse, M doit être normal. Par l'exercice 7 de la série 9, nous avons $N_G(P)M = G$, ce qui contredit le fait que $N_G(P) \subset M$, car alors nous aurions $N_G(P)M \subset M \neq G$. Nous en déduisons que tous les p-sous-groupes de Sylow de G sont normaux. Par le cours 11 ceci implique que G est nilpotent.

Exercise 6. Soit $m_1, \ldots, m_r$ les sous-groupes maximaux de G (nombre fini, car G est fini). Remarquez que nous avons une action de G sur l'ensemble $\{m_1, \ldots, m_r\}$ donnée par conjugaison (vérifiez qu'il s'agit bien d'une action). Ainsi, si $x \in J = \bigcap_{i=1}^r m_i$, alors pour tout $a \in G$, $axa^{-1} \in \bigcap_{i=1}^r am_ia^{-1}$. La deuxième intersection est égale à $\bigcap_{i=1}^r m_i$ par l'observation ci-dessus sur l'action, donc nous obtenons $axa^{-1} \in \bigcap_{i=1}^r m_i = J$. Par le choix arbitraire de $a \in G$, nous concluons que J est normal dans G.

Maintenant, soit P un p-sous-groupe de Sylow de J. Par le même exercice de la série 9 que ci-dessus, $N_G(P)J = G$. Si $N_G(P) \neq G$, alors $N_G(P)J$ est contenu dans un sous-groupe maximal de G, donc ce qui précède ne peut pas tenir. Ainsi, $N_G(P) = G$, ce qui signifie que P est normal dans G et donc normal dans J. Par le cours 11 ceci implique que J est nilpotent.